

# ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ ИЗМЕНЕНИЯ СРЕДНЕГО ЗНАЧЕНИЯ ФРАКТАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ ВЕЙЕРШТРАССА-МАНДЕЛЬБРОТА КАК СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Седелъников А.В., Корунтеева С.С., Подлеснова Д.П.

*Институт энергетики и транспорта  
Самарского государственного аэрокосмического университета, Самара*

axe\_backdraft@inbox.ru

**Введение.** В работе исследуется возможность построения функциональной зависимости между фрактальной размерностью  $D$  действительной части фрактальной функции Вейерштрасса-Мандельброта ( ФВМ ) при тождественно нулевой случайной фазе и моментом от УРД при оценке с помощью ФВМ микроускорений [1]. Сама ФВМ в этом случае имеет вид [2]:

$$\operatorname{Re}W(t) = C(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1 - \cos b^n t}{b^{(2-D)n}} \quad (1)$$

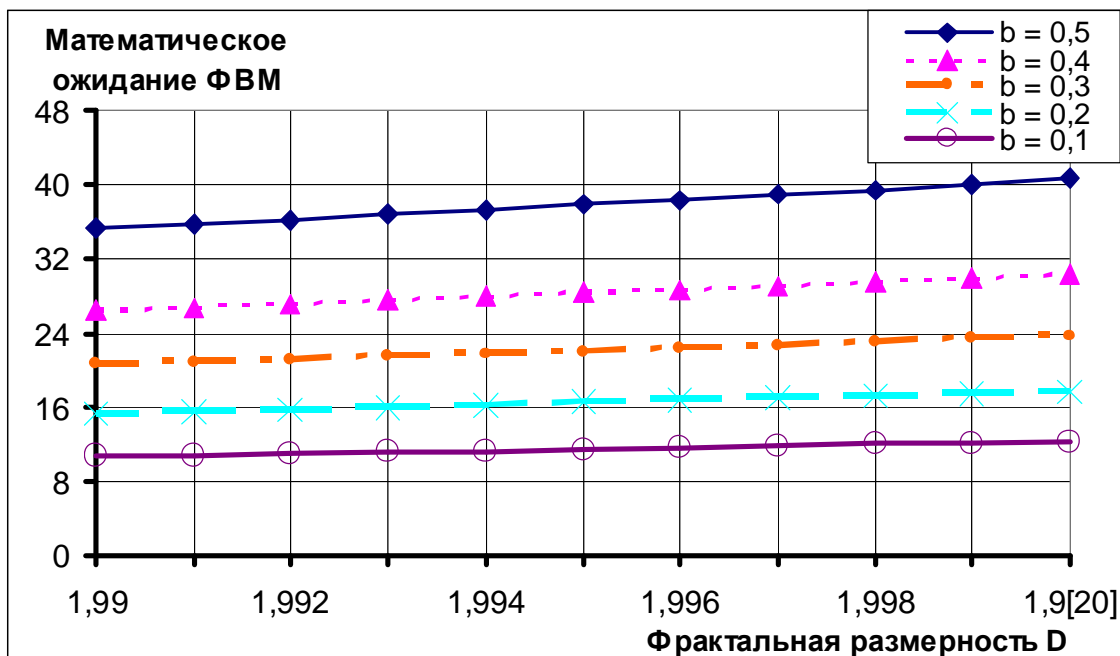
Ранее [3, 4, 5] было выяснено, что параметр  $t$  связан с безразмерным временем протекания технологического процесса на борту космического аппарата ( КА ) и изменяется от 0 до 1. Также был проведен ряд исследований, который показал качественную связь между фрактальной размерностью  $D$  и моментом от управляющих ракетных двигателей системы ориентации и управления движения КА ( УРД ). Подробно постановка задачи и суть, а также развитие и современное состояние проблемы микроускорений рассмотрены в работах [6, 7, 8]. В работах [5, 9] показано, что в коридоре значений фрактальной размерности:

$$1,99 \leq D < 2 \quad (2)$$

ФВМ соответствует понятию случайная величина. Поэтому исследования проводились именно в коридоре ( 2 ). Как известно [10], самая опасная квазистатическая компонента микроускорений практически не демпфируется во времени и тоже может быть представлена как случайная величина.

**Постановка задачи.** Для формирования функциональной зависимости между фрактальной размерностью ФВМ  $D$  и моментом от УРД требуется проведение исследований по влиянию фрактальной размерности ФВМ ( 1 ) в коридоре ( 2 ) на основные числовые характеристики ФВМ как случайной величины. Наиболее важной частью является исследование динамики изменения среднего значения, т.к. фактически это и есть средний уровень микроускорений по фрактальной модели, с одной стороны, и именно благодаря увеличению момента от УРД повышается средний уровень микроускорений в реальных условиях, а поскольку  $D$  как раз моделирует этот момент, то полученные результаты будут играть решающую роль в оценке микроускорений с помощью ФВМ, с другой стороны.

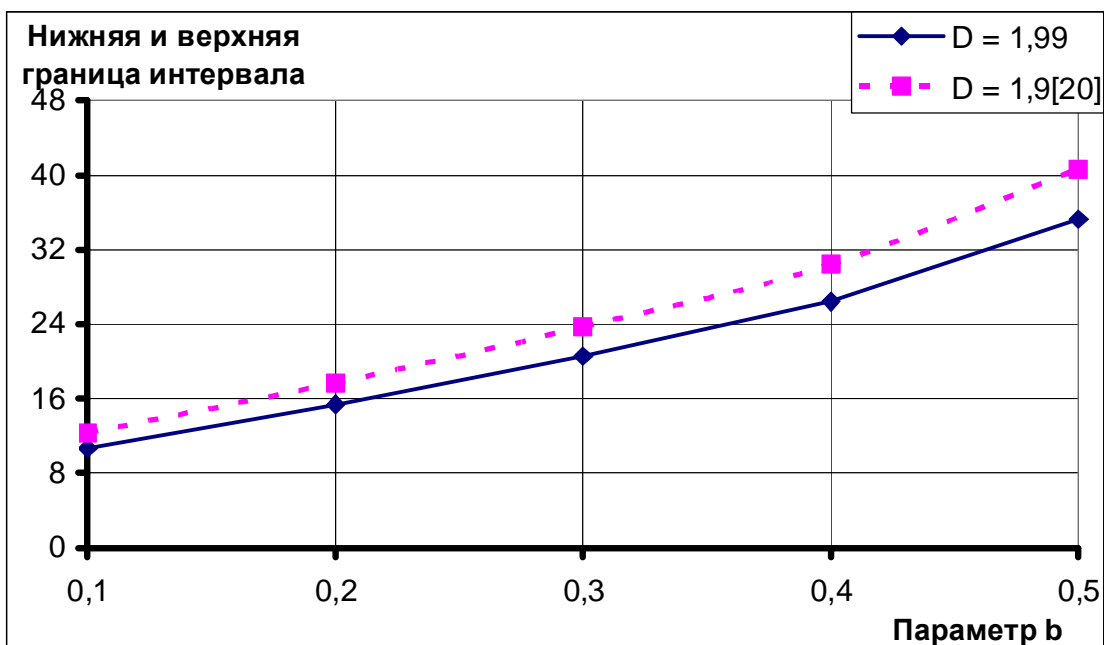
Таким образом, ставится задача исследования изменения среднего значения функции ( 1 ) в коридоре ( 2 ) при изменении параметра  $b$  от 0 до 1. **Основные результаты работы.** На рис. 1 показаны зависимости среднего значения выборки из 1000 точек ФВМ ( 1 ) на отрезке  $0 \leq t \leq 1$  с равномерным шагом  $\Delta t = 0,001$  при различных значениях ее параметров  $D$  и  $b$ .



*Рис. 1. – Динамика изменения среднего значения ФВМ в коридоре (2)*

На рис. 1 1,9[20] обозначает двадцать девяток после запятой. Дело в том, что фрактальная ( дробная ) размерность должна быть строго меньше двух. Сама же ФВМ после этого значения  $D$  перестает изменяться при дальнейшем увеличении фрактальной размерности настолько, что ни одно из тысячи выбранных значений ФВМ при  $D = 1,9[20]$  не отличается от аналогичных значений ФВМ при  $D = 1,9[25]$  или  $D = 1,9[30]$ . Такой же эффект наблюдается и при приближении  $D$  к левой границе (  $D > 1$  ).

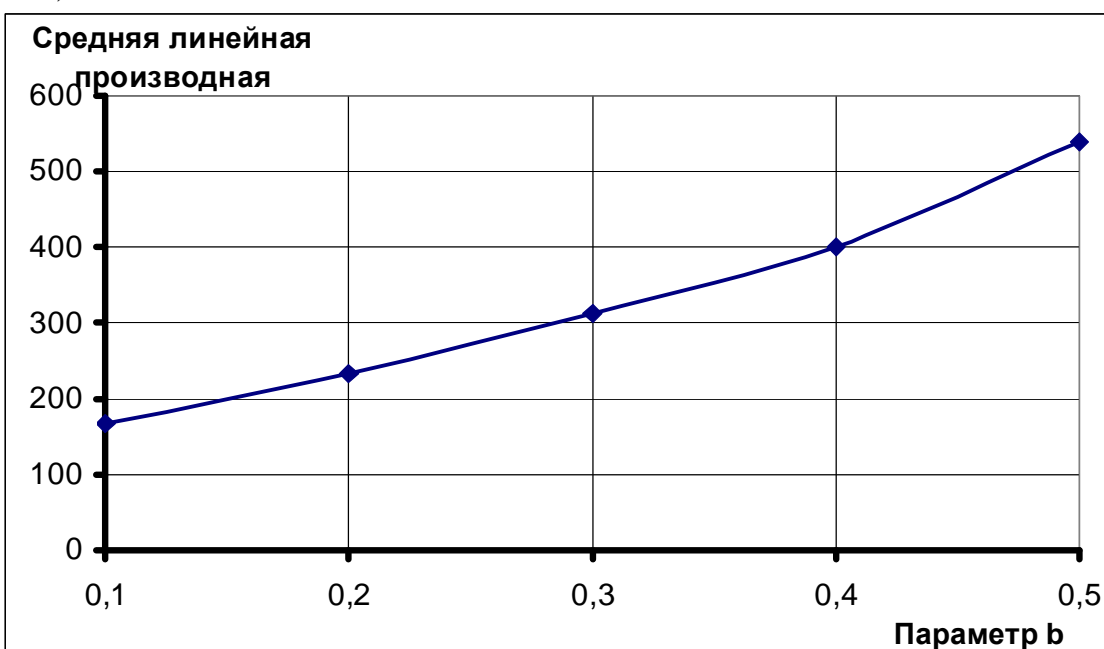
Как видно из рис. 1, зависимости среднего значения от фрактальной размерности  $D$  для всех рассмотренных  $b$  практически линейны с едва уловимой долей нелинейности. Выбор диапазона значений  $b$  связан, прежде всего, с тем что, как показано в работе [11], при  $0,15 < b < 0,45$  ФВМ подчиняется закону нормального распределения. Вообще говоря, при построении фрактальной модели микроускорений диапазон значений  $b$  предлагается искусственно ограничить:  $0 < b < 1$ , т.к. при переходе через 0 и 1 ФВМ существенно изменяется – это легко понять из формулы ( 1 ). Нелинейность хорошо заметна при наблюдении динамики изменения верхней и нижней границы среднего значения в зависимости от  $b$  ( рис. 2 ).



*Рис. 2. – Динамика изменения верхней и нижней границ среднего значения ФВМ в коридоре (2)*

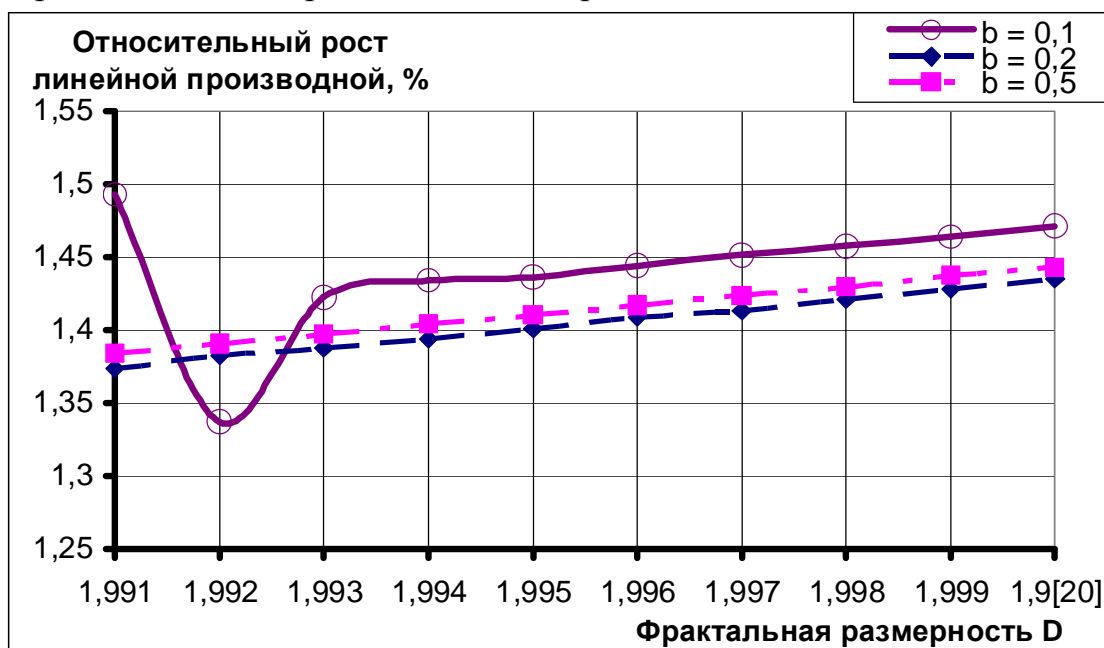
Как видно из рис.2, кривые изменения значений верхней и нижней границ расходятся. Это говорит о том, что  $b$  также оказывает влияние на среднее значение, хотя и очень незначительное. Правильнее говорить о том, что диапазон значений  $D$  слишком мал, чтобы на нем наблюдалось значительное влияние  $b$ .

Если зависимости, представленные на рис. 1, моделировать с помощью линейной модели парной регрессии, то влияние  $b$  на среднюю линейную производную ( коэффициент перед регрессором ) является весьма ощутимым ( рис. 3 ).



*Рис. 3. – Динамика изменения средней линейной производной*

Хотя относительный рост линейной производной, отнесенный к величине этой производной, не превышает 1,5% ( рис. 4 ).



*Рис. 4. – Динамика изменения относительного роста средней линейной производной*

Рис. 4 наглядно показывает, что этим изменением можно пренебречь и считать коэффициент перед регрессором является постоянным. Вместе с этим можно и пренебречь влиянием  $b$  на среднее значение без ущерба для точности.

**Основные выводы по работе.** Проведенные исследования показывают, что среднее значение ФВМ ( 1 ) в коридоре изменения фрактальной размерности  $D$  ( 2 ) практически линейно возрастает с ростом самой  $D$ . Параметр  $b$  оказывает слабое влияние на динамику этого роста: при больших значениях  $b$  прирост ФВМ оказывается более существенным.

При оценке микроускорений с помощью ФВМ без проведения дополнительных исследований можно утверждать о линейной зависимости среднего значения ФВМ от  $D$  в рассматриваемом диапазоне ( 2 ), где ФВМ соответствует понятию случайная величина.

Для формирования функциональной зависимости  $D$  от момента УРД необходимо провести такие же исследования о влиянии изменения момента на создаваемый средний уровень микроускорений внутри КА в постановке задачи, когда демпфирование собственных колебаний упругих элементов КА либо отсутствует вовсе, либо пренебрежимо мало, а сами микроускорения (точнее их квазистатическую) компоненту можно также, как и ФВМ считать случайной величиной.

На первый взгляд кажется, что ограничения, наложенные на  $D$ , являются искусственными, однако, в реальной постановке задачи момент УРД также является ограниченной величиной: он не может быть сколь угодно мал или, наоборот, велик. Таким образом, можно утверждать, что

ограничения ( 2 ) являются естественными ограничениями, наложенными на мощность, а, следовательно, и момент УРД КА.

### Литература

1. **Седельников А.В., Бязина А.В., Антипов Н.Ю.** Использование функции Вейерштрасса-Мандельброта для моделирования микроускорений на борту КА // Сборник научных трудов X Всероссийского научно-технического семинара по управлению движением и навигации ЛА. Самара. 2002. с. 124-128.
2. **Седельников А.В., Бязина А.В.** Использование фракталов в математическом моделировании // Сборник научных трудов в Самарском филиале УРАО. вып. 2-3. Самара. 2002. с. 72 – 85.
3. **Седельников А.В., Бязина А.В., Иванова С.А.** Статистические исследования микроускорений при наличии слабого демпфирования колебаний упругих элементов КА // Научные чтения в Самарском филиале РАО. – Часть 1. Естествознание. – М.: Изд. УРАО. – 2003. – 137 – 158.
4. **Седельников А.В.** Исследование функции распределения уровня микроускорений во времени // Успехи современного естествознания. - № 9. – 2004. – с. 15 – 18.
5. **Седельников А.В., Корунтяева С.С., Чернышева С.В.** Анализ влияния параметров функции Вейерштрасса-Мандельброта на ее закон распределения // Современные наукоемкие технологии. – 2005 г. - № 9. – с. 43-46.
6. **Седельников А.В.** Проблема микроускорений: 30 лет поиска решения // Современные наукоемкие технологии. – 2005 г. - № 4. – с. 15-22.
7. **Седельников А.В.** Статистические исследования микроускорений как случайной величины // Фундаментальные исследования. №6. 2004. с. 123-124.
8. **Седельников А.В., Бязина А.В.** Исследование законов распределения микроускорений, смоделированных с помощью функции Вейерштрасса-Мандельброта и полученных в результате эксперимента // Современные проблемы механики и прикладной математики. – Сборник трудов международной школы-семинара. – Ч. 1. – т. 2. – Воронеж. – 2004. – с. 450-453.
9. **Седельников А.В., Корунтяева С.С., Чернышева С.В.** Проверка закона нормального распределения фрактальной функции Вейерштрасса-Мандельброта // Успехи современного естествознания. – 2005 г. - № 11. – с. 37-38.
10. **Авраменко А.А., Седельников А.В.** Моделирование поля остаточной микрогравитации на борту орбитального КА // Изв. Вузov Авиационная техника. – 1996. - №4. – с. 22-25.
11. **Седельников А.В., Чернышева С.В.** Моделирование микроускорений фрактальной функцией Вейерштрасса-Мандельброта для случая малого демпфирования // Материалы XXX-х Академических чтений по космонавтике. – Москва. – 2006. – с. 100-101.