

УДК 530.1.076

**РАБОТА ПРИ ДВИЖЕНИИ ТЕЛ С ТРЕНИЕМ**

Иванов Е.М.

*Димитровградский институт технологии, управления и дизайна,  
Димитровград*

**Показано, что при действии на тело массы  $m$  силы  $F$  под любым углом при наличии трения и без него, будет совершена одна и та же работа  $A = F^2 t^2 / (2m)$ .**

Если на тело массы  $m$ , находящегося на гладкой горизонтальной поверхности, действует постоянная сила  $F$ , направленная под некоторым углом  $\alpha$  к горизонту и при этом тело перемещается на некоторое расстояние  $S$ , то говорят, что сила  $F$  совершила работу  $A$ . Величину работы определяют по формуле [1,2,3]:

$$A = F \cdot S \cos \alpha \quad (1)$$

Однако в природе идеально гладких поверхностей не бывает, и на поверхности контакта двух тел всегда возникают силы трения. Вот как об этом пишется в учебнике [1, Стр. 200]: «Работа силы трения покоя равна нулю, поскольку перемещение отсутствует. При скольжении твердых поверхностей сила трения направлена против перемещения. Ее работа отрицательна. Вследствие этого кинетическая энергия трущихся тел превращается во внутреннюю – трущиеся поверхности нагреваются».

Автором данной статьи было просмотрено множество школьных и вузовских учебников и задачников, но работа против сил трения рассматривалась только применительно к равномерному движению:

$$A_{TP} = F_{TP} \cdot S = mNS \quad (2)$$

где  $m$  - коэффициент трения скольжения.

Только в учебнике О.Д. Хвольсона [3, стр. 92] рассмотрен случай УСКОРЕННОГО ДВИЖЕНИЯ при наличии сил трения: «Итак, следует отличать два случая производства работы: в первом сущность работы заключается в преодолении внешнего сопротивления движению, которое совершается без увеличения скорости движения тела; во втором – работа обнаруживается увеличением скорости движения, к которому внешний мир относится индифферентно.

На деле мы обыкновенно имеем СОЕДИНЕНИЕ ОБОИХ СЛУЧАЕВ: сила  $f$  преодолевает какие-либо сопротивления и в то же время меняет скорость движения тела.

Положим, что  $f'$  не равно  $f$ , а именно, что  $f' < f$ . В таком случае на тело действует сила  $f - f'$ , работа  $r$  которой вызывает увеличение скорости тела. Мы имеем  $r = (f - f')S$ , откуда

$$fS = f'S + r \quad (*)$$

Работа  $r = f'S$  состоит из двух частей:  $f'S$  тратится на преодоление внешнего сопротивления,  $r$  на увеличение скорости тела».

Представим это в современной интерпретации (рис. 1). На тело массы  $m$  действует сила тяги  $F_T$ , которая больше силы трения  $F_{TP} = mN = mng$ . Работу силы тяги в соответствии с формулой (\*) можно записать так

$$A = F_T S = F_{TP} S + F_a S = A_{TP} + A_a \quad (3)$$

где  $F_a = F_T - F_{TP}$  - сила, вызывающая ускоренное движение тела в соответствии со II законом Ньютона:  $F_a = ma$ . Работа силы трения отрицательна, но здесь и далее мы будем использовать силу трения и работу трения по модулю. Для дальнейших рассуждений необходим численный анализ. Примем следующие данные:

$m = 10$  кг;  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>;  $F_T = 100$  Н;

$m = 0,5$ ;  $t = 10$  с. Проводим следующие вычисления:

$F_{TP} = mng = 50$  Н;  $F_a = 50$  Н;

$a = F_a / m = 5$  м/с<sup>2</sup>;  $V = at = 50$  м/с;

$K = mV^2 / 2 = 12,5$  кДж;

$S = at^2 / 2 = 250$  м;  $A_a = F_a S = 12,5$  кДж;

$A_{TP} = F_{TP} S = 12,5$  кДж. Таким образом суммарная работа

$A = A_{TP} + A_a = 12,5 + 12,5 = 25$  кДж

А теперь рассчитаем работу силы тяги  $F_T$

для случая, когда трение отсутствует ( $m = 0$ ).

Проводя аналогичные вычисления, получаем:  $a = 10 \text{ м/с}^2$ ;  $V = 100 \text{ м/с}$ ;  $K = 50 \text{ кДж}$ ;  $S = 500 \text{ м}$ ;  $A = 50 \text{ кДж}$ . В последнем случае за те же 10 с мы получили работу в два раза больше. Могут возразить, что и путь в два раза больше. Однако, что бы ни говорили, получается парадоксальная ситуация: мощности, развиваемой одной и той же силой, отличаются в два раза, хотя импульсы сил одинаковы  $I = F_T t = 1 \text{ кН}\cdot\text{с}$ . Как писал М.В. Ломоносов еще в 1748 г.: «...но все изменения, совершающиеся в природе, происходят таким образом, что сколько к чему прибавилось столько же отнимется у другого...». Поэтому попробуем получить другое выражение для определения работы.

Запишем II закон Ньютона в дифференциальной форме:

$$F \cdot dt = d(mV) \quad (4)$$

и рассмотрим задачу о разгоне первоначально неподвижного тела (трение отсутствует). Интегрируя (4), получим:  $F \cdot t = mV$ . Возведя в квадрат и разделив на  $2m$  обе части равенства, получим:

$$\frac{F^2 t^2}{2m} = \frac{mV^2}{2} \quad \text{или} \quad A = K \quad (5)$$

Таким образом, получили другое выражение для вычисления работы

$$A = \frac{F^2 t^2}{2m} = \frac{I^2}{2m} \quad (6)$$

где  $I = F \cdot t$  - импульс силы. Это выражение не связано с путем  $S$ , пройденным телом за время  $t$ , т.е. оно может быть использовано для вычисления работы, совершаемой импульсом силы и в том случае, если тело остается неподвижным, хотя, как утверждают во всех курсах физики, в этом случае никакой работы не совершается.

Переходя к нашей задаче об ускоренном движении с трением, запишем сумму импульсов сил:  $I_T = I_a + I_{TP}$ , где  $I_T = F_T t$ ;  $I_a = F_a t$ ;  $I_{TP} = F_{TP} t$ . Возведя в квадрат сумму импульсов, получим:

$$F_T^2 t^2 = F_a^2 t^2 + 2F_a F_{TP} t^2 + F_{TP}^2 t^2$$

Разделив все члены равенства на  $2m$ , получим:

$$\frac{F_T^2 t^2}{2m} = \frac{F_a^2 t^2}{2m} + \frac{F_a F_{TP} t^2}{m} + \frac{F_{TP}^2 t^2}{2m} \quad (7)$$

или

$$A = A_a + A_{YT} + A_{TP}$$

где  $A_a = F_a^2 t^2 / 2m$  - работа, затрачиваемая на ускорение;  $A_{TP} = F_{TP}^2 t^2 / 2m$  - работа, затрачиваемая на преодоление силы трения при равномерном движении, а  $A_{YT} = F_a F_{TP} t^2 / m$  - работа, затрачиваемая на преодоление силы трения при ускоренном движении. Численный расчет дает следующий результат:  $A = A_a + A_{YT} + A_{TP} = 12,5 + 25 + 12,5 = 50 \text{ кДж}$ , т.е. мы получили ту же самую величину работы, которую совершает сила  $F_T$  при отсутствии трения.

Рассмотрим более общий случай движения тела с трением, когда на тело действует сила  $F$ , направленная под углом  $a$  к горизонту (рис. 2). Теперь сила тяги  $F_T = F \cos a$ , а силу  $F_{Л} = F \sin a$  - назовем силой левитации, она уменьшает силу тяжести  $P = mg$ , а в случае  $F_{Л} = mg$  тело не будет оказывать давления на опору, будет находиться в квазиневесомом состоянии (состоянии левитации). Сила трения  $F_{TP} = mN = m(P - F_{Л})$ . Силу тяги можно записать в виде  $F_T = F_a + F_{TP}$ , а из прямоугольного треугольника (рис. 2) получим:  $F^2 = F_T^2 + F_{Л}^2$ . Умножая последнее соотношение на  $t^2$ , получим баланс импульсов сил, а разделив на  $2m$ , получим баланс энергий (работ):

$$\frac{F^2 t^2}{2m} = \frac{(1 + m^2) F_{Л}^2 t^2}{2m} + \frac{F_a^2 t^2}{2m} - \frac{2m F_{Л} F_a t^2}{2m} - m^2 F_{Л} g t^2 + mg F_a t^2 + \frac{1}{2} m^2 m g^2 t^2 \quad (8)$$

Приведем численный расчет для силы  $F = 100 \text{ Н}$  и  $a = 30^\circ$  при тех же условиях ( $m = 10 \text{ кг}$ ;  $m = 0,5$ ;  $t = 10 \text{ с}$ ). Работа силы  $F$  будет равна  $A = F^2 t^2 / 2m = 50$ , а формула (8) дает следующий результат (с точностью до третьего знака после запятой):  $50 = 15,625 + 18,974 - 15,4 - 12,5 + 30,8 + 12,5 \text{ кДж}$ .

Как показывают расчеты, сила  $F = 100 \text{ Н}$ , действуя на тело массы  $m = 10 \text{ кг}$  под любым углом  $a$  за 10 с совершает одну и ту же работу 50 кДж.

Последний член в формуле (8) представляет собой работу силы трения при равномерном движении тела по горизонтальной поверхности со скоростью  $V$

$$A_{TP} = \frac{F_{TP}^2 t^2}{2m} = \frac{F_{TP}^2 S^2}{2mV^2} = \frac{(F_{TP} S)^2}{4K} = \frac{1}{2} m^2 m g^2 t^2 \quad (9)$$

Таким образом, под каким бы углом не действовала данная сила  $F$  на данное тело массы  $m$ , при наличии трения или без него, за время  $t$

будет совершена одна и та же работа (даже если тело неподвижно):

$$A = \frac{F^2 t^2}{2m} \quad (10)$$

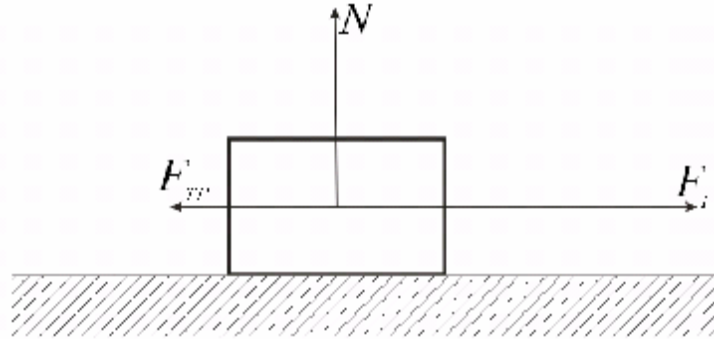


Рисунок 1.

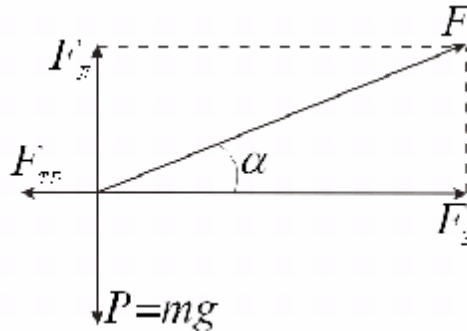


Рисунок 2.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Матвеев А.Н. механика и теория относительности. Учеб. пособие для физ. спец. вузов. – М.: Высш. шк., 1986.

2. Стрелков С.П. Механика. Общий курс физики. Т. 1. – М.: ГИТТЛ, 1956.

3. Хвольсон О.Д. Курс физики. Т. 1. РСФСР Госуд. Изд-во, Берлин, 1923.

#### THE WORK WHEN THE BODY MOVES WITH FRICTION

Ivanov E.M.

*Dimitrovgrad Institute of technology, management and design, Dimitrovgrad*

We demonstrate, that when the (mass  $m$ ) with power  $F$  has an effect on pepy body at any angle with friction or without friction the work will be the same:  $A = (F \cdot t)^2 / 2m$ .