УДК 517.923:517.977.5

ОПТИМАЛЬНАЯ КОРРЕКЦИЯ НЕУСТОЙЧИВОЙ ДИНАМИКИ УРАВНЕНИЯ МАТЬЕ

Талагаев Ю.В., Тараканов А.Ф.**
Балашовский филиал Саратовского государственного университета, Балашов
Борисоглебский государственный педагогический институт, Борисоглебск

В работе предложен и численно проверен метод параметрической коррекции для динамических систем с неустойчивой динамикой. В качестве такой системы взято уравнение Матье. С помощью принципа Лагранжа аналитически найдены оптимальные корректирующие функции, позволяющие решать задачу стабилизации неустойчивой динамики.

Стабилизация неустойчивой и хаотической динамики является важной частью общей задачи управления динамическими системами. Значительное продвижение в этой области связано с результатами, полученными в интенсивно развивающейся области – управлении хаосом [1-4].

В настоящей работе возможности оптимальной параметрической коррекции изучены на семействе диссипативных неавтономных систем, описываемых дифференциальным уравнением вида:

$$\ddot{x} + \frac{dU(x)}{dx} = -2\gamma\dot{x} - p_c(x)\, f(t),$$
$$f(t) = \eta\cos(\Omega t) \qquad (1)$$

где $U(x)$ – потенциал, определяющий собственную динамику системы, $f(t)$ – гармоническое параметрическое возмущение амплитуды η и частоты Ω, $2\gamma\dot{x}$ – диссипация. Система (1) описывает параметрически возбуждаемый диссипативный колебательный контур. Вариативность модели связана с видом потенциала, а также показателем степени переменной x в $p_c(x)$.

Рассмотрим случай $U(x) = \omega_0^2\, x^2/2$, тогда (1) примет вид:

$$\ddot{x} + \omega_0^2\, x = -2\gamma\dot{x} - \omega_0^2\, x\eta\cos(\Omega\, t), \qquad (2)$$

где ω_0 – собственная частота колебаний системы без параметрического возмущения. При выполнении условий резонанса $\Omega \approx 2\,\omega_0/n$, где $n = 1, 2, \ldots$ – порядок резонанса, возникает параметрическая неустойчивость, приводящая к экспоненциальному нарастанию амплитуды колебаний. Линейное затухание $2\gamma\dot{x}$ не стабилизирует параметрическую неустойчивость. Полагая в (2) $\gamma = 0$, приходим к известному в теории параметрических колебаний уравнению Матье [2]:

$$\ddot{x} + \omega_0^2(1 + \eta\cos(\Omega\, t))\, x = 0. \qquad (3)$$

На рис. 1(a),(b) для случая основного параметрического резонанса $\omega_0 = 1$ представлено развитие неустойчивого динамического режима системы (3). Видно, что колебания неограниченно нарастают.

Положим $\dot{x}_1 = x_2$ и введем в (3) корректирующую функцию h:

$$\dot{x}_1 = x_2,\ \ \dot{x}_2 = -\omega_0^2(1 + h + \eta\cos(\Omega\, t))\, x_1. \qquad (4)$$

Функция $h = h(t)$ играет роль управления. Введем фазовое ограничение в виде круга

$$g(t, x(t)) = (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 - r^2 \le 0 \qquad (5)$$

и построим штрафную функцию $\Phi(x, C) = C\max\left[0,\, g(t, x(t))\right]^2$ за его нарушение, где $C > 0$ – штрафной параметр.

Задача оптимального управления имеет вид: требуется удержать систему (4) внутри допустимого множества (5) с наименьшими затратами энергии $\int_{t_0}^{T} \frac{h^2}{2}\,dt \to \min$.

Составим функцию Гамильтона:

$$H(t, x, h, \psi, C) = \psi_1\, x_2 -$$
$$-\psi_2\,\omega_0^2\, x_1\left[1 + h + \eta\cos(\Omega\, t)\right] - \frac{h^2}{2} + \Phi(x, C),$$

где ψ_1, ψ_2 – сопряжённые переменные. Из необходимого условия оптимальности $\frac{\partial}{\partial h} H(t, x, h^*, \psi, C) = 0$ найдем оптимальную корректирующую функцию:

$$h^* = -\psi_2\,\omega_0^2\, x_1. \qquad (6)$$

Оптимальная траектория x^* находится интегрированием следующей системы уравнений и подбором $C > 0$:

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad x_1(t_0) \in [x_{10}^1, x_{10}^2],$$
$$\dot{x}_2 = -\omega_0^2 (1 + h + \eta \cos(\Omega\, t))\, x_1, \quad x_2(t_0) \in [x_{20}^1, x_{20}^2],$$
$$\dot{\psi}_1 = -\frac{\partial}{\partial x_1} H(t, x, h^*, \psi, C), \quad \psi_1(t_0) = \psi_1^{\ 0},$$
$$\dot{\psi}_2 = -\frac{\partial}{\partial x_2} H(t, x, h^*, \psi, C), \quad \psi_2(t_0) = \psi_2^{\ 0}.$$

где $(\psi_1^0, \psi_2^0) \neq 0$ – вектор начальных условий для сопряжённой системы, ортогональный вектору $(x_1(t_0), x_2(t_0))$.

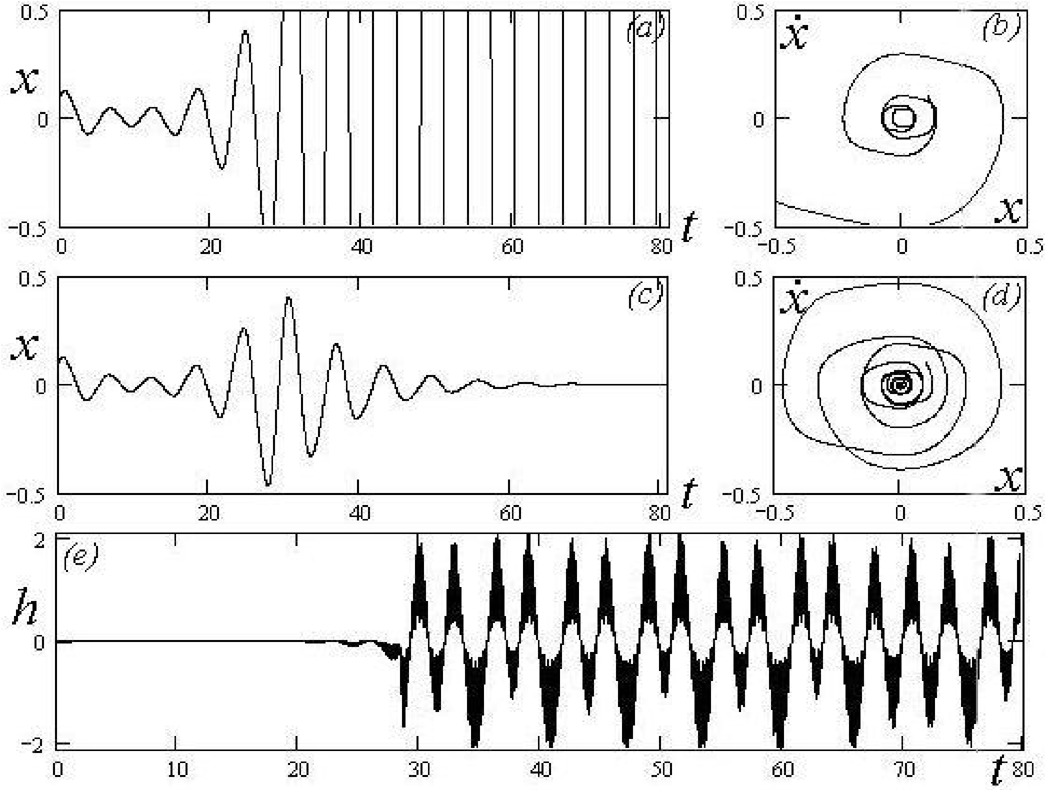

Рисунок 1. Коррекция уравнения Матье (3), $\eta = 0.7$, $\omega_0 = 1$, $\Omega = 2\,\omega_0$:
(a), (b) – неустойчивый режим до коррекции,
(c),(d) – фазовая плоскость режима коррекции,
(e) – график оптимальной корректирующей функции.

На рис. 1(c),(d) представлены результаты численного моделирования уравнения (3) в условиях основного параметрического резонанса. Они получены с фазовым ограничением (5) при $a_1 = a_2 = 0$, $r = 0.5$ и параметром штрафа $C = 700$. Оптимальная параметрическая коррекция позволила *стабилизировать неустойчивую систему в состоянии равновесия*. При соответствующих значениях C стабилизация имеет место для начальных условий, лежащих внутри допустимого множества. Результаты аналогичны и при соотношении частот $\Omega = \omega_0$.

График корректирующей функции h на рис. 1(e) позволяет увидеть особенности коррекции. Вначале фазовая траектория системы находилась внутри фазового ограничения (несколько обходов вокруг начала координат). При этом $h = 0$. Всплеск корректирующего воздействия обусловлен тем, что параметрическая неустойчивость начала выталкивать траекторию за область круга. В результате включился алгоритм учета фазовых ограничений, и система стабилизировалась в нуле.

Рассматривалась также общая скорректированная система вида

$$\ddot{x} + \omega_0^2 (1 + h)(1 + \eta \cos(\Omega\, t))\, x = 0. \qquad (7)$$

На рис. 2 представлен результат общей коррекции с фазовым ограничением в виде единичного круга и параметром штрафа $C = 1$.

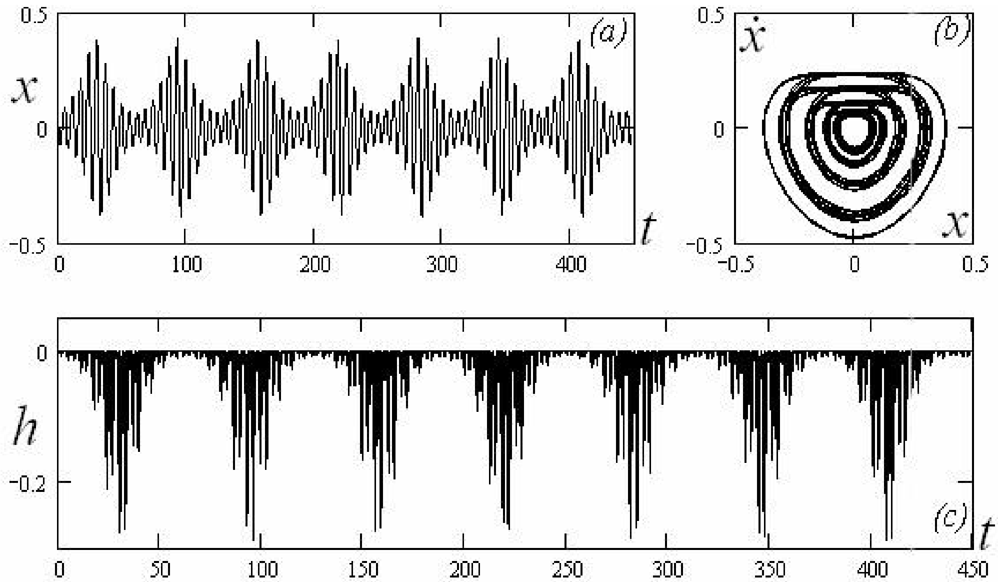

Рисунок 2. Общая параметрическая коррекция параметрически возмущенного уравнения Матье (7), $\eta = 1,\ \omega_0 = 1,\ \Omega = \omega_0$:

(*a*) – зависимость координаты от времени,
(*b*) – фазовая плоскость режима коррекции,
(*c*) – оптимальная корректирующая функция.

Полученная корректирующая функция имеет вид:

$$h = -\psi_2\, \omega_0^2\, x_1 (1 + \eta\, \cos(\Omega\, t))\,. \qquad (8)$$

Существенное отличие аналитического выражения (8) от (6) в том, что h зависит как от текущего состояния системы, так и от величины возмущения $1 + \eta\, \cos(\Omega\, t)$. Оптимальная коррекция приводит к *подавлению неустойчивой динамики и переходу в режим модулированных колебаний*. Для соотношения частот $\Omega = 2\,\omega_0$ результаты оказались аналогичными.

Возможности метода параметрической коррекции были также апробированы на различных системах, способных демонстрировать неустойчивые и хаотические режимы (нелинейные осцилляторы, уравнение Ван дер Поля и его модификации и др.). Коррекции подвергалась динамика как исходных (автономных) систем, так и систем в присутствии периодического внешнего воздействия. При этом рассматривались варианты хаотизации внешним силовым и параметрическим возмущением. Исследованию также подверглись трехмерные системы Лоренца,Ресслера, Чуа и др., которым при соответствующих значениях параметров свойственно наличие хаотического аттрактора.

Несомненным достоинством предложенного метода является возможность *аналитически получить оптимальные корректирующие функции* и корректировать поведение объекта в случае возникновения неустойчивого или хаотического поведения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Андриевский Б.Р., Фрадков А.Л. //Автоматика и телемеханика. 2003. №5. С.3-45.
2. Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Рыскин Н.М. Нелинейные колебания. – М.: Изд-во физ.-мат. лит, 2002. 292 с.
3. Лоскутов А.Ю. //Вестник МГУ. 2001. №2. С.3-21.
4. Фрадков А.Л. Кибернетическая физика: Принципы и примеры. – СПб.: Наука, 2003. 208с.

** Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ.

OPTIMAL CORRECTION OF UNSTABLE DYNAMICS OF MATHIEU’S EQUATION

Talagaev Yu.V., Tarakanov A.F.
Balashov Branch of Saratov State University, Balashov
Borisoglebsk State Teachers Training Institute, Borisoglebsk

In the article, a parametrical correction technique for unstable dynamical systems is offered. As the test system, the Mathieu’s equation is given. With the Lagrange Principle, optimal correction functions is analytically obtained.