

УДК 530.1.076

РАБОТА ПАДЕНИЯ ТЕЛА В ОДНОРОДНОМ ПОЛЕ ТЯЖЕСТИ

Иванов Е.М.

*Димитровградский институт технологии, управления и дизайна,
Димитровград*

Работа силы тяжести при падении тел зависит от силы сопротивления среды. Чем больше сила сопротивления, тем больше время падения и больше импульс силы тяжести. Работа, совершаемая силой, пропорциональна квадрату импульса: $A = I^2 / 2m$.

В курсах физики утверждается, что если тело массы m равномерно поднимать вверх на высоту H с помощью силы $F = mg$, то сила совершает работу $A_F = mgH$, равную потенциальной энергии $\Pi = mgH$, а сила тяжести отрицательную работу $A_p = -mgH$ [1]. Автором [2] было показано, что работа подъема тела на высоту H всегда больше mgH . Чтобы поднимать тело вверх, необходимо приложить силу $F_0 = mg + \Delta F$. Работа подъема будет равна

$$A_{\Sigma} = \frac{F_0^2 t^2}{2m} = \frac{mg^2 t^2}{2} + g\Delta F t^2 + \frac{\Delta F^2 t^2}{2m} = \frac{(mgH)^2}{\Delta FH} + 2mgH + \Delta FH \quad (1)$$

Время подъема t найдется из соотношения: $H = at^2 / 2 = \Delta F t^2 / 2m$. На графике (рис. 1) показана зависимость работы A_{Σ} , выраженной в долях $\Pi = mgH$, от величины соотношения $\Delta F / mg$. Работа имеет минимум, равный $A_{\min} = 4mgH$ при $\Delta F = mg$. При свободном падении тела с высоты H потенциальная энергия переходит в кинетическую $K = mV^2 / 2$, где $V^2 = 2gH$.

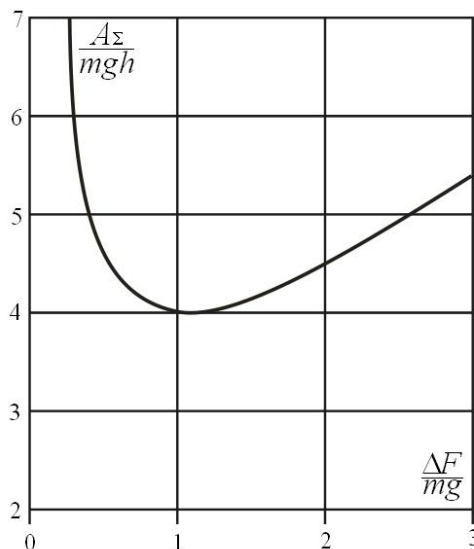


Рисунок 1. Зависимость работы A_{Σ} , выраженной в долях $\Pi = mgH$, от величины соотношения $\Delta F / mg$

Таким образом, потенциальная энергия соответствует только работе, совершаемой силой тяжести при СВОБОДНОМ падении тела. Работа при свободном падении:

$$A = mgH \quad (a)$$

$$A = mg^2 t^2 / 2 = P^2 t^2 / 2m \quad (b) \quad (2)$$

Т.к. $H = gt^2 / 2$, а $P = mg$, $Pt = I$ -импульс силы тяжести.

Рассмотрим работу, совершаемую силой тяжести, при других случаях падения тел.

СЛУЧАЙ I. Падение происходит при действии постоянной силы F , направленной верти-

кально. Если сила направлена вниз (F_+), как сила тяжести, то это движение можно рассматривать как свободное падение под действием силы $F_1 = mg + F_+$, как в гравитационном поле напряженности $g_1 = g + F_+ / m$. Примем следующие числовые значения: $m = 1$ кг, $H = 20$ м, $g = 10$ м/с², $F_+ = 5$ Н. Получаем: время падения $t_+^2 = 2H / g_1 = 2,666$ с², скорость $V_+^2 = 2g_1H = 600$ (м/с)², $K_+ = mV_+^2 / 2 = 300$ Дж, работа $A_+ = mg_1H = F_1^2 t_+^2 / 2m = 300$ Дж.

Таким образом, работа падения не равна потенциальной энергии $\Pi = mgH = 200$ Дж (при обычном свободном падении $t^2 = 2H / g = 4$ с², $V^2 = 2gH = 400$ (м/с)², $K = mV^2 / 2 = 200$ Дж).

Если сила направлена вертикально вверх (F_-), то она является силой сопротивления (трения). В этом случае падение происходит под действием результирующей силы:

$$F_a = mg - F_- = 5 \text{ Н}$$

с ускорением: $a = g - F_- / m = 5$ м/с².

Время падения: $t_-^2 = 2H / a = 8$ с², скорость $V_-^2 = 2aH = 200$ (м/с)², $K_- = 100$ Дж. Используя обычную формулу (2а) для расчета работы, получаем:

$$A = mgH = (F_a + F_-)H = (5 + 5)20 = 200 \text{ Дж.}$$

Используя формулу (2b), имеем $A = (mgt_-)^2 / 2m = (F_a + F_-)^2 t_-^2 / 2m = 400$ Дж.

Автором в работах [3, 4,5] показано, что работа силы (производство энергии) пропорциональна квадрату импульса силы:

$$A = \frac{P^2 t_-^2}{2m} = \frac{F_a^2 t_-^2}{2m} + \frac{F_a F_- t_-^2}{m} + \frac{F_-^2 t_-^2}{2m} = 100 + 200 + 100 = 400 \text{ Дж}$$

Это говорит о том, что в общем случае работа зависит от времени действия силы, а не от пути, т.к. один и тот же путь (в данном случае $H = 20$ м) может быть пройден за разное время в зависимости от величины силы сопротивления. Время падения: $t_-^2 = 2H / a = 2H / (g - F_- / m)$, работа $A = mg^2 t_-^2 / 2$. Из этих выражений могут быть составлены безразмерные комплексы

$$\frac{gt_-^2}{2H} = \frac{1}{1 - \beta} \tag{a}$$

$$\frac{A}{mgH} = \frac{1}{1 - \beta} \tag{b} \tag{3}$$

Где $\beta = F_- / mg$ может изменяться от 0 до 1. Случай $\beta = 1$ соответствует условию левитации тела, когда оно неподвижно зависает под действием двух одинаковых, но противоположно направленных сил $F_- = -mg$. На графике (рис. 2) показана зависимость комплекса $A/(mgH)$ в зависимости от величины β .

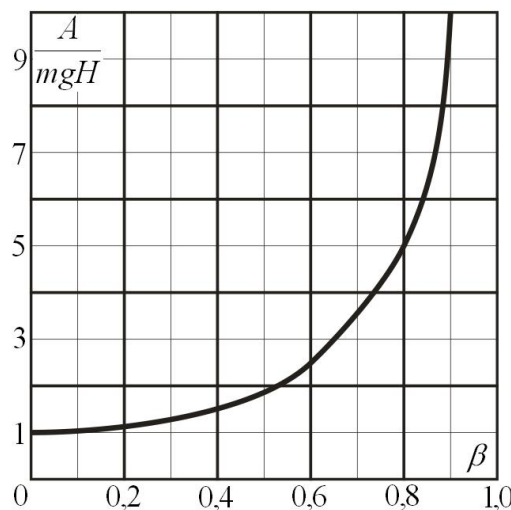


Рисунок 2. Показана зависимость комплекса $A/(mgH)$ в зависимости от величины β

Таким образом, в случае действия постоянной силы сопротивления (трения), работа, совершаемая силой тяжести $P = mg$, возрастает и в пределе $A \rightarrow \infty$ при $\beta = 1$. Случай $\beta = 1$ соответствует статической задаче, когда груз

удерживается подвесом на неизменной высоте H .

СЛУЧАЙ II. Падение происходит при действии силы сопротивления, пропорциональной скорости падения:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = mg - bV \quad (4)$$

Решение этого дифференциального уравнения при нулевых начальных условиях имеет вид:

$$V = \frac{mg}{b}(1 - e^{-bt/m}) \quad (a)$$

$$a = ge^{-bt/m} \quad (b) \quad (5)$$

$$S = x(t) = \int_0^t V(t)dt = \frac{mgt}{b} + \frac{m^2 g}{b^2}(e^{-bt/m} - 1) \quad (6)$$

Если использовать общепринятую формулу $A = \int FdS = mgH$, то получаем $A = 200$ Дж. Примем $b = 0,5$ Н·с/м. Расчет по формуле $A = F^2 t^2 / 2m = (mg)^2 t^2 / 2m$ при $t = 2,4$ с (время определяется из трансцендентного уравнения (6) при $S = H$) дает численное значение работы $A = 288$ Дж. Силу $P = mg$ можно представить в виде суммы двух сил: $mg = F_a(t) + F_T(t)$, где $F_a = ma$ - сила, вызывающая ускоренное движение тела вниз в соответствии со II законом Ньютона, ускорение определяется выражением (5b), а сила $F_T = bV$ - сила сопротивления, скорость определяется выражением (5a).

Используя импульсы сил $I_i = \int F_i dt$, работу, совершаемую силой тяжести, можно расписать более подробно

$$A = \frac{I_a^2}{2m} + \frac{I_a I_T}{m} + \frac{I_T^2}{2m} \quad (7)$$

Импульс силы, вызывающей ускоренное движение тела:

$$I_a = \int_0^t mge^{-bt/m} dt = \frac{m^2 g}{b}(1 - e^{-bt/m}) \quad (8)$$

$$\text{При } t = 2,4 \text{ с } I_a = 13,97b \text{ Н·с;}$$

$$A_a = I_a^2 / 2m = 97,664 \text{ Дж.}$$

Импульс силы трения:

$$I_T = \int_0^t mg(1 - e^{-bt/m}) dt = mgt - \frac{m^2 g}{b}(1 - e^{-bt/m}) \quad (9)$$

$$\text{При } t = 2,4 \text{ с } I_T = 10,024 \text{ Н·с;}$$

$$A_T = I_T^2 / 2m = 50,24 \text{ Дж.}$$

Работа, связанная с трением при УСКОРЕННОМ движении:

$$A_{aT} = I_a I_T / m = 140,095 \text{ Дж}$$

$$\text{Суммарная работа } A = A_a + A_{aT} + A_T = 288 \text{ Дж}$$

Таким образом, работа совершаемая силой тяжести при падении тел, зависит от силы сопротивления среды. Чем больше сила сопротивления, тем больше время падения и больше импульс силы тяжести, а работа, совершаемая силой, пропорциональна квадрату импульса силы: $A = I^2 / 2m$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кикоин И.К., Кикоин А.К. Физика: Учебн. для 9 кл. средн. шк. - М.: Просвещение, 1990.
2. Иванов Е.М. Работа и энергия в классической механике и первый закон термодинамики. Димитровград: ДИТУД УлГТУ, 2005.
3. Иванов Е.М. Определение работы и работа силы трения. //Успехи современного естествознания. 2005. №8. С.10
4. Иванов Е.М. Работа при движении тел с трением. //Фундаментальные исследования. 2005. №6. С.10
5. Иванов Е.М. Работа в классической механике. //Современные наукоемкие технологии. 2005. №5 С. 12.

WORK OF FALLING OF A BODY IN A HOMOGENEOUS FIELD OF WEIGHT

Ivanov E.M.

Dimitrovgrad institute of technology, management and design, Dimitrovgrad

Work of a gravity at falling bodies depends on force of resistance of environment(Wednesday). The more force of resistance, the is more time of falling and more impulse of a gravity. The work made by force, is proportional to a square of an impulse: $A = I^2 / 2m$.