

ОБОБЩЕННОЕ УРАВНЕНИЕ ФОКЕРА-ПЛАНКА И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ К ЗАДАЧАМ ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОСА

Бейбалаев В.Д.

Дагестанский Государственный Университет

На основе уравнения Смолуховского-Эйнштейна дается вывод обобщенного уравнения Фокера – Планка в производных дробного порядка. Рассматриваются некоторые решения уравнения параболического типа с дифференцированием дробного порядка α , ($0 < \alpha \leq 1$).

Отсутствие адекватных количественных моделей процессов теплообмена в многокомпонентных системах со сложной пространственно-временной структурой, для которых характерны эффекты памяти, самоорганизации привело к тенденции пересмотра основных положений теории теплообмена. Одно из направлений связано с использованием принципа локальной неравновесности [1], что позволяет построить более последовательную теорию массопереноса в гетерогенных системах [2]. Другие направления связаны с использованием методов фликер-шума [3], детерминированного хаоса [4], концепции фрактала [5].

Одним из эффективных методов исследования процессов теплообмена является метод основанный на применении стохастических дифференциальных уравнений [6]. В настоящей статье выводятся обобщенные уравнения Фокера-Планка в производных дробного порядка на основе уравнения Смолуховского-Эйнштейна. Рассматриваются решения некоторых частных случаев обобщенного уравнения Фокера-Планка и их приложения к теории теплопроводности, фильтрации в пористых средах с фрактальной структурой.

Значительные успехи при рассмотрении кинетических явлений в системах с фрактальной структурой связаны с использованием формализма интегродифференцирования дробного порядка. Повышен-

ный интерес к дифференциальным уравнениям дробного порядка [7-9] обусловлено их физической интерпретацией [10]. Было показано, что переход к производной дробного порядка по времени позволяет учитывать эффекты памяти системы [10]. Это и вызвало их широкое применение в механике, физике, биофизике, экономике – практически во всех областях естествознания [11-16].

Область применимости решений дифференциальных уравнений дробного порядка значительно шире, чем дифференциальных уравнений с целочисленным дифференцированием, поскольку последние оказываются их частным случаем. Уравнения в производных дробного порядка, позволяют учесть процессы, в которых одновременно участвуют как обратимые, так и необратимые процессы [10,11]. Это позволяет не только получить принципиально новые результаты, но более глубоко осмыслить известные результаты, позволяя при этом, создать адекватные количественные модели исследуемых явлений

1. Обобщенное уравнение Фокера-Планка

В основе описания случайных процессов лежит уравнение Смолуховского-Эйнштейна, которое записывается для условной плотности вероятности имеет вид

$$W(y_1 t_1 | y_2 t_2) dy_2 \quad [6]$$

$$W(y_1 | y_2; t + \Delta t) = \int dy_3 W(y_1 | y_3; t) W(y_3 | y_2; \Delta t) \quad (1)$$

Для вывода обобщенного уравнения Фокера-Планка исходим из выражения

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Q(y) \frac{\partial^\alpha W(y|y_1;t)}{\partial t^\alpha} dy \quad (2)$$

где $0 < \alpha \leq 1$, производная дробного порядка определена соотношением [7]

$$\frac{\partial^\alpha W(y|y_1;t)}{\partial t^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\partial}{\partial t} \int \frac{W(y|y_1;\tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau \quad (3)$$

Здесь $\Gamma(z)$ – гамма-функция Эйлера. С помощью соотношений (2), (3) уравнение Смолуховского-Эйнштейна (1) можно привести к виду

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Q(y) \frac{\partial^\alpha W(y|y_1;t)}{\partial t^\alpha} dy = \int dy dy_2 dt_2 Q(y) W(y_2 | y_1; t_2) W^{(\alpha)}(y_2 | y; t - t_2) \quad (4)$$

где введена функция

$$W^{(\alpha)}(y_2 | y; t - t_2) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{W(y_2 | y; z - t_2)}{(t-z)^\alpha} dz$$

В дальнейшем мы воспользуемся разложением функции $Q(y)$ в обобщенный ряд Тейлора [7]

$$Q(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(y-y_2)^{n+\beta}}{\Gamma(n+\beta+1)} \frac{d^{\beta+n}}{dy^{\beta+n}} Q(y) \Big|_{y=y_2}$$

где $0 < \beta \leq 1$. В результате уравнение (4) можно привести к виду

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Q(y) \frac{\partial^\alpha W(y|y_1;t)}{\partial t^\alpha} dy = \sum_{n=0}^{\infty} \int dy_2 dt_2 \frac{Q^{(n+\beta)}(y_2)}{\Gamma(n+\beta+1)} A_{n+\beta}^\alpha(y_2; t-t_2) W(y_2 | y_1; t_2) \quad (5)$$

где введены функции

$$A_{n+\beta}^\alpha(y_2; t-t_2) = \int dy (y-y_2)^{n+\beta} W^{(\alpha)}(y_2 | y; t-t_2) \quad (6)$$

Функции $A_{n+\beta}^\alpha$ - представляют собой обобщенные моменты. При $\alpha = 1$ и $\beta = 1$ (6) переходит в обычное выражение для момента. В (6), произведя интегриро-

вание по частям, окончательно получим следующее дифференциальное уравнение в производных дробного порядка

$$\frac{\partial^\alpha W(y | y_1; t)}{\partial t^\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\Gamma(n+\beta+1)} \frac{\partial^{n+\beta}}{\partial y^{n+\beta}} \int dt_2 [A_{n+\beta}^\alpha(y; t-t_2) W(y | y_1; t_2)] \quad (7)$$

Уравнение (7) представляет собой обобщенное уравнение Фокера-Планка записанное в производных дробного порядка. Обобщенное уравнение Фокера-Планка (7) позволяет исследовать новый класс стохастических процессов, которые

реализуются в системах с фрактальной структурой.

В дальнейшем рассмотрим различные модификации уравнения (7). В частности, предполагая, что для обобщенных моментов справедливо выражение

$$A_{n+\beta}^\alpha(y_2; t-t_2) = A_{n+\beta}^\alpha \cdot \delta(t-t_2)$$

получим следующее уравнение

$$\frac{\partial^\alpha W(y|y_1;t)}{\partial t^\alpha} = -\frac{1}{\Gamma(1+\beta)} \frac{\partial^\beta}{\partial y^\beta} (A_\beta^\alpha W(y|y_1;t)) + \frac{1}{\Gamma(2+\beta)} \frac{\partial^{1+\beta}}{\partial y^{1+\beta}} (A_{1+\beta}^\alpha W(y|y_1;t)) \quad (8)$$

В случае $\alpha = 1$ и $\beta = 1$ уравнение (7) переходит в известное уравнение Фокера-Планка [6]. Таким образом, уравнение (7) представляет собой обобщенное уравнение Фокера-Планка.

Уравнение типа (7) лежит в основе различных задач тепломассопереноса.

$$\frac{d^\alpha T(\tau, \xi)}{d\tau^\alpha} - a \frac{t_0}{l_0^2} \frac{d^\beta T(\tau, \xi)}{d\xi^\beta} = 0$$

где $0 < \alpha \leq 1, 1 < \beta \leq 2$, $\tau = \frac{t}{t_0}$, $\xi = \frac{x}{l_0}$ - безразмерные время и координата, t_0, l_0 -

характерные временной и масштабный параметры, $a = \lambda / (\rho \cdot c_v)$ - коэффициент температуропроводности.

Приложение уравнения обобщенной теплопроводности к задачам теории теплового поля земли в рамках концепции

Уравнения типа (8) используются при исследовании задач тепломассопереноса.

1. В качестве применения уравнений типа (8) рассмотрим обобщенное уравнение теплопроводности [17]

фрактала рассмотрено в работе. В частности в случае стационарного поля для распределения температуры в глубь земли получаем следующий результат

$$T(\xi) = A \xi^{1-\zeta} + B \xi^\zeta, 0 < \zeta \leq 1.$$

Таким образом, распределение температуры имеет нелинейный характер.

2. Рассмотрим частный случай дифференциального уравнения

$$\frac{\partial^\alpha f(x,t)}{\partial t^\alpha} - D \frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2} = 0 \quad (9)$$

где $0 < \alpha \leq 1, t > 0, |x| < \infty$.

В качестве функции f может быть рассмотрена температура при рассмотрении задач теплопроводности, концентрация вещества при рассмотрении задач массопереноса [18], и распределения давления

при рассмотрении задач гидродинамики [15]. Решение уравнения зависит от вида начальных условий. Рассмотрим случай, когда начальное условие к уравнению (1) дается в виде

$$\frac{\partial^{\alpha-1}}{\partial t^{\alpha-1}} f(x,0) = A(x) \quad (10)$$

Задачу Коши (9),(10) решаем, совершая преобразование Фурье по переменной x

$$f(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \exp(-ikx) f(k,t)$$

В результате уравнение (9) запишется в виде

$$\frac{\partial^\alpha f(k,t)}{\partial t^\alpha} + Dk^2 f(k,t) = 0$$

решение которого, с начальным условием $\frac{\partial^{\alpha-1}}{\partial t^{\alpha-1}} f(k,0) = a(k)$ известно [7]

$$f(k, p) = a(k)t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-Dk^2 t^\alpha)$$

Здесь $E_{\alpha,\beta}(-z^\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{\alpha n}}{\Gamma(\alpha \cdot n + \beta)}$ - функция Миттаг-Леффлера [7].

Отметим, что для целых α функцию Миттаг-Леффлера можно свести к гипергеометрическому ряду. Например, при $\alpha = k=1,2,\dots,n$ получим

$$E_{k,\beta}(-z^k) = (2\pi)^{(k-1)/2} k^{1/2-\beta} \prod_{l=0}^{k-1} \Gamma\left(\frac{\beta+l}{k}\right) {}_1F_k\left(1; \frac{\beta}{k}, \frac{\beta+1}{k}, \dots, \frac{\beta+k-1}{k}; -\left(\frac{z}{k}\right)^k\right)$$

где ${}_pF_q(a_1, \dots, a_p; b_1, \dots, b_q; z)$ гипергеометрическая функция

Для определения исходной функции, совершая обратное преобразование Фурье, окончательно получим

$$f(x,t) = \frac{t^{\alpha-1}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} dx \exp(ik(x-x')) A(x') E_{\alpha,\alpha}(-Dk^2 t^\alpha) \quad (11)$$

Для δ -источника $A(x) = \delta(x)$ и при $\alpha=1$ решение (11) учитывая, что $E_{1,1}(-z) = \exp(-z)$, принимает известный вид

$$f(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi Dt}} \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right) \quad (12)$$

В остальных случаях мы имеем новый класс решений.

В случае, например $\alpha = 1/2, 1/4$ функция $E_{\alpha,\alpha}(-z^\alpha)$ принимает вид

$$E_{1/2,1/2}(-\sqrt{z}) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} - \sqrt{z} \exp(z) [1 - \operatorname{erf}(\sqrt{z})]$$

$$E_{1/4,1/4}(-z^{1/4}) = \frac{1}{\Gamma(1/4)} {}_1F_1(1; 1/4; z) + \frac{\sqrt{z}}{\Gamma(3/4)} {}_1F_1(1; 3/4; z) - z^{3/4} \exp(z) [1 + \operatorname{erf}(\sqrt{z})] - \frac{z^{1/4}}{\sqrt{\pi}}$$

Рассмотрим решение уравнения (7) когда задается начальное значение функции $f(x,t=0) = f(x,0)$. В этом случае удобно использовать преобразование Лап-

ласа. При использовании преобразования Лапласа существенно то, что в отличие от обыкновенной производной, когда имеет место соотношение

$$\int_0^{\infty} \exp(-pt) \frac{\partial f(x,t)}{\partial t} dt = pf(x,p) - f(x,0)$$

для дробной производной, как можно непосредственно убедиться имеет место соотношение $\int_0^{\infty} \exp(-pt) \frac{\partial^\alpha f(x,t)}{\partial t^\alpha} dt = p^\alpha f(x,p)$. Для учета начального условия

$f(x,t=0) = f(x,0)$ необходимо его явно внести в уравнение и исходить из уравнения следующего вида [19]

$$\frac{\partial^\alpha f(x,t)}{\partial t^\alpha} - \frac{f(x,0)}{\Gamma(1-\alpha)t^\alpha} - D \frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2} = 0 \quad (13)$$

Второе слагаемое в (13), по существу, есть результат действия дробной производной на начальное условие. Совершая, как и ранее сначала преобразование Фурье

по переменной x и, затем преобразование $f(k,p)$ следующее выражение Лапласа по переменной t получим для

$$f(k, p) = \frac{f(k, 0)p^{\alpha-1}}{p^\alpha + Dk^2}$$

что дает для искомой функции следующий результат

$$f(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dk \exp(-ikx) f(k, 0) E_{\alpha,1}(-Dk^2 t^\alpha)$$

Рассмотрим случай, когда $f(x, t = 0) = \delta(x)$ тогда

$$f(x, t) = \int_0^{\infty} dk \cos(kx) E_{\alpha,1}(-Dk^2 t^\alpha) \tag{14}$$

При $\alpha = 1$ решения (8) и (12) совпадают. Однако для остальных значений ($0 < \alpha \leq 1$) эти решения существенно отличаются. Так, в отличие от решения (8) в (12) отсутствует сингулярный множитель $t^{\alpha-1}$, а также отличается второй индекс

функции Миттаг-Леффлера ($\alpha \rightarrow 1$). В этом случае имеем следующие выражения функции Миттаг-Леффлера, например, для $\alpha = 1/2, 1/4$:

$$E_{1/2,1}(-z^{1/2}) = \exp(z) [1 - \operatorname{erf}(\sqrt{z})]$$

$$E_{1/4,1}(-z^{1/4}) = \exp(z) \left[1 + \operatorname{erf}(\sqrt{z}) - \frac{\gamma(1/4; z)}{\Gamma(1/4)} - \frac{\gamma(3/4; z)}{\Gamma(3/4)} \right]$$

где $\gamma(a; z)$ - неполная Гамма-функция. Характер решения (10) качественно не отличается от решения (5). Остановимся на решении задачи

$$\frac{\partial^\alpha f(x, t)}{\partial t^\alpha} - D \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2} = 0 \tag{15}$$

для ограниченной области: $0 < x \leq l$, с краевыми условиями

$$f(x, 0) = \varphi(x),$$

$$-\frac{\partial f(x, t)}{\partial x} + h_0 f(x, t) = 0 \quad \text{при } x=0$$

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} + h f(x, t) = 0 \quad \text{при } x=l$$
(16)

Эта задача для краевых условий первого рода рассмотрена в работе [20].

Используя метод разделения переменных окончательно получим следующее решение задачи (15,16)

$$f(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (\cos(\lambda_n x) + \frac{h_0}{\lambda_n} \sin(\lambda_n x)) \cdot E_{\alpha,1}(-\lambda_n D t^\alpha) \tag{17}$$

где,

$$C_n = \frac{2\lambda_n^2}{l(\lambda_n^2 + h_0^2) + h_0 + h_1 \frac{\lambda_n^2 + h_0^2}{\lambda_n^2 + h_1^2}} \int_0^l \varphi(x) (\cos(\lambda_n x) + \frac{h_0}{\lambda_n} \sin(\lambda_n x)) dx.$$

Здесь λ_n корни уравнения

$$tg(\lambda l) = \frac{\lambda(h_0 + h_n)}{\lambda^2 - h_0 h_1}$$

Решение (17) при $\alpha = 1$ совпадает с известным ранее решением. В случае $\alpha = 1/2$, принимает вид

$$f(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (\cos(\lambda_n x) + \frac{h_0}{\lambda_n} \sin(\lambda_n x)) \cdot \exp(\lambda_n^4 A^2 t^2) [1 - \operatorname{erf}(\lambda_n^2 A t)] \quad (18)$$

Поведение решения (14) при $t \rightarrow \infty$ имеет степенной характер [14]

$$\exp(z)(1 - \operatorname{erf}(\sqrt{z})) = \exp(z) \cdot \operatorname{erfc}(\sqrt{z}) \approx \frac{1}{\sqrt{\pi \cdot z}} \left[1 + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2m-1)}{(2z)^m} \right]$$

Это отличается от асимптотического поведения решения (12) который имеет экспоненциальный характер.

Полученные решения могут быть использованы при исследовании процессов тепломассопереноса в системах обладающих фрактальной структурой.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

1. Соболев С.А. // Усп. физ. наук. 1997. Т.167. № 10. С. 1095.
2. Абаржи И.И. // Журн. физ. химии. 1999. Т.73. №11. С.1943.
3. Тимашев С.Ф. //Российский хим. журн. 1997. Т.41. № 9. С.17.
4. П.Берже, И.Помо, К.Видаль. Порядок в хаосе. М.:Мир, 1991. 368 с.
5. Олемской А.И., Флат А.Я //Усп. физ.наук.1993.Т.163. №12.С.1.
6. Гарднер К.В. Стохастические методы в естественных науках. М.:Мир. – 1986. 528 с.
7. Самко С.Г., Килбас Ф.Ф., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые приложения. Минск. Наука и техника. 1987.688 с.
8. Oldham К.В., Spanier J. The fractional calculus. New York .1974.234 p.
9. Нахушев А.М. Элементы дробного исчисления и их применение// Нальчик. Изд-во КБНЦ РАН, 2000. – 299 с
10. Нигматулин Р.И. Дробный интеграл и его физическая интерпретация //ГМФ. 1992. Т.90, №3. С. 354-368.
11. Батунин А.В. Фрактальный анализ и универсальность Фейгенбаума в фи-

зике андронов //УФН.1995. Т.165, № 6. С. 645-660.

12.Зосимов В.В., Лямшев Л.М. Континуальное описание аномальной диффузии по гребешковой структуре // 1995. Т.166, № 4. С. 361 – 402.

13. Мейланов Р.П. К теории фильтрации в пористых средах с фрактальной структурой //Письма ЖТФ. 1996.Т.22, № 23. С.40-43.

14. Нахушев А.М. Уравнения математической биологии//М.: Высш. шк., 1995.- 301 с.

15. Мейланов Р.П. Обобщенное уравнение одномерной фильтрации с дифференцированиями дробного порядка //ИФЖ.2001. Т.74, № 2. С. 34-37.

16. Мейланов Р.П., Янполов М.С.Особенности фазовой траектории «фрактального» осциллятора //Письма в ЖТФ. Т.28, №1.С.67-73.

17. Мейланов Р.П. Концепция фрактала в теории теплового поля земли.//Международная конференция «Тепловое поле Земли» Москва 2000 г. С. 63-68.

18. Р.П.Мейланов, Д.А. Свешникова, О.М. Шабанов.//ЖФХ. 2003, Т.77,№ 3, С. 260-264.

19. Кочубей А.Н. Диффузия дробного порядка // ДУ 1990. Т.26, № 4. – С .660 - 670

20. Геккиева С.Х. Краевая задача для обобщенного уравнения переноса с дробной производной по времени //Доклады Адыгской АН. 1994. Т.1,№ 1. С.17-18

