УДК 517.1/.18

ПРИЛОЖЕНИЕ ПОНЯТИЯ *C*–ТОЧНОЙ ПАРЫ В АНАЛИЗЕ

Сухотин А.М.

Томский политехнический университет

Подробная информация об авторах размещена на сайте
«Учёные России» - http://www.famous-scientists.ru

В статье введено понятие *C*–точной пары натуральных переменных: пара (*m*, *k*) переменных $m\in A$ и $k\in B$ называется *C*-точной парой, если для каждых соседних в $E \stackrel{\Delta}{=} A\cup B\subseteq N$ элементов *m* и *k* найдётся число *C*>0 такое, что |*m*-*k*|<*C*. Получены, в частности, два независимых необходимых признака сюрьективности инъективного отображения φ: $N\to N$: 1) $\forall\, i\in N\ \exists\ j\in N: N_i\subset \varphi(N_{i+j})$, где $N_i \stackrel{\Delta}{=} \{1, 2, \ldots, n_i\}$ и 2) $\lim\limits_{n\in N}(\varphi(n):n)=1$. Доказана Теорема 2.3: если $A\stackrel{\Delta}{=}\{n\}\subseteq N$ и $B\stackrel{\Delta}{=}\{m\}\subseteq N$ – два бесконечные подмножества множества N, тогда $\exists\ C\in N$ такое, что пара (*n*, *m*) переменных является *C*-точной парой. Доказаны, в частности, справедливость предельного равенства $\lim r_n=0$ для гармонического ряда $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}$, сходимость числовой последовательности $(a)\stackrel{\Delta}{=}\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, где $a_n=\sin\ln n$ и др.

Свойства бесконечности: $a+\infty=\infty$, $a\times\infty=\infty$, $\infty+\infty=\infty$, $\infty\times\infty=\infty$, $\infty^{\infty}=\infty$ и др. упрощают решения многих задач анализа. Однако такой подход, когда $\sum(1)^n=\infty=\sum n^{-1}$, лишает понятие бесконечности всякой определённости и структуры, не допуская его изучения и увеличивая риск появления ошибок в доказательствах утверждений о бесконечном. Галилео Галилей, открыв, что количества натуральных чисел и их квадратов якобы равны, завещал быть осторожными в сравнении бесконечных количеств: «…свойства равенства, а также большей и меньшей величины не имеют места там, где речь идёт о бесконечности, и применимы только к конечным количествам» [1, с. 140–146]). С конца XIX века подобные парадоксы стали объясняться с помощью взаимно однозначного соответствия между множествами *A* и *B*. Для конечных множеств *A* и *B* проверка сюръективности отображения $\psi: A\to B$, т. е. условия $\psi(A)=B$, не вызывает затруднений. Аналогичная процедура для отображений бесконечных множеств не является такой тривиальной, более того, выполнимость формулы, например, φ: $N\to N$ на всём множестве $N\stackrel{\Delta}{=}\{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$ натуральных чисел, как правило, требует доказательства, не смотря на очевидность этого на некотором начальном отрезке множества *N*. В статье сформулированы и доказаны признаки сюръективности инъективных отображений φ: $N\to N$. Введённые понятия нашли приложения в теории функций и в теории чисел [3, 4].

1. Об отображениях конечных множеств и о понятии *C*-точной пары натуральных переменных

Три очевидных утверждения об отображениях конечных множеств приведены ниже для сравнения суждений о *конечном* и *бесконечном*. Как принято в анализе, биективность множеств A и B обозначается как A~B.

Утверждение 1.1. Конечные множества A и B биективны, т. е. существует инъективное отображение $\psi: A \to B$ и $\psi(A) = B$ тогда и только тогда, когда равны количества их элементов: $(A \sim B) \Leftrightarrow (|A|=|B|)$.

Утверждение 1.2. Не существует биекции между конечным множеством A и его собственным подмножеством $B \subset A$, другими словами, инъективное отображение $\varphi: A \to B$ является *неосуществимым на всем множестве* $A \supset B$.

Утверждение 1.3. Пусть A и B – собственные подмножества конечного множества C и A~B, тогда всякая инъекция $\varphi: A \to B$ может быть продолжена до биекции $\psi: C \to C$, по которой $\psi(C) = C$.

В статье доказано, что содержание Утверждений 1.2–1.3 сохраняется для отображений бесконечных подмножеств A и B множества $\boldsymbol{N}$.

Под переменной ниже понимается тройка (x, X, θ), где x - символ переменной, X – множество значений переменной и θ - порядок во множестве X. Бесконечность множества $\boldsymbol{N}$ натуральных чисел понимается в связи с принципом математической индукции как неограниченная возможность перехода от (n) к $(n+1)$, а фраза «при предельном переходе в $F(n)$» означает следующее:

$$\forall n \in \boldsymbol{N} \ F(n) \Rightarrow F(n+1). \tag{1.1}$$

Принцип предельного перехода (1.1) и равномерная направленность множества $\boldsymbol{N}$ мотивируют, почти точно следуя *одинаково упорядоченным переменным* Г. М. Фихтенгольца [6, с. 643–644], введение понятия *C-точной пары*. Пусть множества $A \subset \boldsymbol{N}$ и $B \subset \boldsymbol{N}$ бесконечны, $A \cap B \supseteq \varnothing$ и $E \triangleq A \cup B \subseteq \boldsymbol{N}$.

Определение 1.1. Пара (m, k) натуральных переменных $m \in A$ и $k \in B$ называется *C-точной парой*, если для каждых соседних в E элементов m и k найдётся число $C>0$ такое, что

$$|m-k|<C. \tag{1.2}$$

Условие (1.2) C-точности пары (n, m) имеет следующую эквивалентную, что очевидно, форму записи:

$$(\forall n \in A \ \exists \ m \in B): m = n + q(n), \ (\forall m \in B \ \exists \ n \in A): n = m + p(m), \tag{1.2′}$$

где $q(n), p(m) \in \boldsymbol{Z}, |q(n)| < \tilde{C}, |p(m)| < \tilde{C}, \ \tilde{C} \geq C$.

2. О признаках сюръективности отображения φ: N→N

Ниже, по умолчанию, рассматриваются инъективные функции φ: $\boldsymbol{N} \to \boldsymbol{N}$. Пусть последовательность

$\xi \triangleq \{1, n_1, n_2, \ldots, n_i, \ldots\} \subset \boldsymbol{N}$,

$N(\xi) \triangleq \{i : \exists \ n_i \in \xi\} \subset \boldsymbol{N}$ и $\forall \, i \in N(\xi) \ \ n_{i+1} > n_i$. Пусть далее, $N_i \triangleq \{1, 2, \ldots, n_i\}$, $\Delta_{i+1} \triangleq N_{i+1} \setminus N_i$. Последовательность ξ и инъективное отображение φ: $\boldsymbol{N} \to \boldsymbol{N}$ определяют $\forall \, i \in N(\xi)$ две последовательности $\{\delta_i\}$ и $\{d_i\}$ неотрицательных целых чисел, где:

$$\delta_i \triangleq \max_{n \leqslant n_i} \{\varphi(n) - n_i\} \geq 0, \ d_i \triangleq |D_i| \geq 0, \ D_i \triangleq N_i \setminus \varphi(N_i). \tag{2.1}$$

Если $d_i^- \triangleq |D_i^-| \geq 0$, $D_i^- \triangleq \varphi(N_i) \setminus N_i$, то очевидно, что $0 \leqslant d_i^- = d_i \ \leqslant \delta_i$. Действительно, $d_i^- = \delta_i$, если $\{ p: \ n_i < p < \delta_i, \forall n \leqslant n_i \ \ p \neq \varphi(n) \} = \varnothing$. В иных случаях $d_i^- < \delta_i$. Отображение φ: $\boldsymbol{N} \to \boldsymbol{N}$ определяет также последовательность $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ целых чисел, где $\varphi_n \triangleq \varphi(n) - n$. Справедливо следующее

Утверждение 2.1. Если

$\delta_\varphi \triangleq \sup\limits_{n\in \boldsymbol{N}}\{\varphi(n)-n\}$ и для некоторой последовательности ξ $\delta_\xi \triangleq \sup\limits_{i\in \boldsymbol{N}(\xi)}\{\delta_i\}$, то справедливо неравенство $\delta_\xi \le \delta_\varphi$.

● Если ξ=$\boldsymbol{N}$, то $\delta_\xi = \delta_\varphi$, что очевидно. В общем случае, $\exists \tilde{n}$ такое, что $\delta_\varphi = \varphi_{\tilde{n}}$. Тогда найдётся $i_0 \in N(\xi)$: $n_{i_0} < \tilde{n} \leqslant n_{i_0+1}$. Если $\tilde{n} = n_{i_0+1}$, то вновь $\delta_\xi = \delta_\varphi$, если же $n_{i_0} < \tilde{n} < n_{i_0+1}$, то $\delta_{i_0+1} = \varphi(\tilde{n})$ - $n_{i_0+1} < \varphi(\tilde{n})$ - $\tilde{n} = \varphi_{\tilde{n}}$. Тогда $\delta_\xi < \delta_\varphi$. Однако, положив всего лишь $\tilde{n}_{i_0+1} \triangleq \tilde{n}$, мы получим пару ($\xi$, $N(\xi)$) такую, что вновь имеем равенство $\delta_\xi = \delta_\varphi$. Поэтому для всякого инъективного отображения φ: $\boldsymbol{N} \to \boldsymbol{N}$ существует последовательность ξ такая, что

$$\delta_\xi = \delta_\varphi \,. \blacksquare \tag{2.2}$$

Ниже мы формулируем [4, с. 88] непосредственное и очевидное следствие определения множества D_i в (2.1) и определения сюръективности отображения φ: $\varphi(\boldsymbol{N}) = \boldsymbol{N}$ (ср. Утверждение 1.1).

Утверждение 2.2. Необходимое условие сюръективности каждого инъективного отображения φ: $\boldsymbol{N} \to \boldsymbol{N}$ имеет следующие две эквивалентные формы:

$$\forall\, i\in \boldsymbol{N}(\xi)\ \exists\ j\in \boldsymbol{N}:\ D_i \cap D_{i+j} = \varnothing \text{ и } \boldsymbol{N}_i \subset \varphi(\boldsymbol{N}_{i+j})\,. \tag{2.3}$$

● Мы докажем, например, что ($D_i \cap D_{i+j} = \varnothing$)$\Rightarrow$($\boldsymbol{N}_i \subset \varphi(\boldsymbol{N}_{i+j})$). Действительно, включение $\varphi^{-1}(D_i) \subset N_{i+j}$ следует из $D_i \cap D_{i+j} = \varnothing$ и определения D_{i+j}, значит $D_i \subset \varphi(N_{i+j})$. Кроме того, $N_i \setminus D_i \subset \varphi(N_i) \subset \varphi(N_{i+j})$ по определению D_i. Следовательно, $\boldsymbol{N}_i \subset \varphi(\boldsymbol{N}_{i+j})$. Обратная импликация доказывается аналогично. ■

Ниже фраза «для почти всех *i*» обозначает «за исключения конечного множества индексов *i*» и по определению мы пишем «$\tilde{\forall}\, i$».

Достаточные признаки сюръективности (*a*) и антисюръективности (*b*) функции φ, являющиеся следствием Утверждения 2.2 и определения в (2.1) последовательности $\{d_i\}$, даны в терминах d_i ниже.

Утверждение 2.3. Достаточные условия сюръективности (*a*) и антисюръективности (*b*) инъективного отображения φ: $\boldsymbol{N} \to \boldsymbol{N}$ имеют, соответственно, вид

$$(a)\ \tilde{\forall}\, i \in \boldsymbol{N}(\xi)\ d_i = 0\,, \tag{2.4a}$$

$$(b)\ \forall C\ \exists\, i(C) \in \boldsymbol{N}(\xi)\ d_{i(C)} > C\,. \tag{2.4b}$$

● Каждое число d_i определяет количество элементов *n* из подмножества $\boldsymbol{N}_i$, не имеющих прообраза $\varphi^{-1}(n)$ в $\boldsymbol{N}_i$, поэтому неограниченность последовательности $\{d_i\}$, $i\in \boldsymbol{N}(\xi)$, противоречит условию $\varphi(N) = N$ сюръективности отображения φ. Условие (2.4*a*) гарантирует существование числа i_0 такого, что для отображения φ справедлива следующая цепь импликаций:

$$\forall j > i_0\ \ d_j = 0 \Rightarrow D_j = \varnothing \Rightarrow \varphi(N_j) = N_j \Rightarrow \varphi(\boldsymbol{N}) = \boldsymbol{N}\,. \blacksquare$$

Как показывают примеры, условия (2.4*a*) и (2.4*b*) не являются необходимыми, соответственно, для сюръективности и антисюръективности функции φ.

Про антисюръективное инъективное отображение скажем, что оно *потенциально не осуществимо на всем* множестве $\boldsymbol{N}$ (ср. с Утверждением 1.2).

Теорема 2.1. Последовательности $\{\delta_i\}$ *и* $\{d_i\}$, $i\in\boldsymbol{N}(\xi)$, определяемые парой (ξ, φ), удовлетворяют [4, с. 86] одному и только одному из трёх следующих условий:

$$(a)\ \tilde{\forall}\, i\in \boldsymbol{N}(\xi):\ (\delta_i=0)\Leftrightarrow(d_i=0), \qquad (2.5a)$$

$$(b)\ (\exists\, C_1, C_2,\ C_2\le C_1\in\boldsymbol{N}):\ (\tilde{\forall}\, i\in \boldsymbol{N}(\xi)\ (0<\delta_i<C_1)\Leftrightarrow(0<d_i<C_2)), \qquad (2.5b)$$

$$(c)\ i\in\boldsymbol{N}(\xi)\ \ (d_i\to\infty)\Leftrightarrow(\delta_i\to\infty). \qquad (2.5c)$$

● Если $\forall i\in\boldsymbol{N}(\xi)$ $\delta_i=0$, то $\forall i\in\boldsymbol{N}(\xi)$ $\varphi(N_i)=N_i$ и, по определению, $d_i=0$, и, наоборот, из чего следует (2.5*a*). Предположим, далее, что $0<\delta_i<C_1$, тогда $d_i=d_i^-\leqslant\delta_i<C_1$. В силу последнего условия, очевидно, что неограниченность последовательности $\{\delta_i\}$ является следствием неограниченности последовательности $\{d_i\}$. В частности, при $i\in\boldsymbol{N}(\xi)$ справедлива импликация

$$(d_i\to\infty)\Rightarrow(\delta_i\to\infty).$$

Пусть далее $\exists\, C_2\in\boldsymbol{N}$ и $\forall i\in\boldsymbol{N}(\xi)$ $d_i<C_2$. Теперь мы покажем, что совмещение двух условий: $d_i^-=d_i<C_2$ и неограниченность последовательности $\{\delta_i\}$ приводит к противоречию. Не нарушая общности рассуждений, можно считать, что $\delta_i\to\infty$. Из $\delta_i\to\infty$ также следует, что $\delta_{i-q}\to\infty$ при всех конечных q и, в том числе, при $q=C_2$. Пусть $k_i\triangleq\delta_i-n_i$, тогда $\exists\, n^*$ такое, что $\forall i>n^*$, $k_{i-q}>n_i$. Из этого следует, что для всех j таких, что $i-q\le j\le i$, $k_j\notin D_i$, и, так как $\varphi(\boldsymbol{N}_i)=(\boldsymbol{N}_i\setminus D_i)\cup D_i^-$, то $\{k_{i-q}, k_{i-q+1},\ldots,k_i\}\subseteq D_i^-$, т. е. все $k_j\in D_i^-$. Значит, число d_i^-, равное количеству элементов множества D_i^-, удовлетворяет следующему неравенству: $d_i^-\ge(i)-(i-q-1)=q+1=_{|q=C_2}=C_2+1$.

Вместе с нашим предположением, что $C_2>d_i^-$, мы имеем противоречие $C_2\ge C_2+1$, которое подтверждает (2.5*b*) и вместе с ним (2.5*c*). ■

Следствие Утверждений 2.2-2.3 и Теоремы 2.1 записано ниже.

Утверждение 2.4. Необходимый признак сюръективности инъективного отображения φ: $\boldsymbol{N}\to\boldsymbol{N}$ в терминах последовательности $\{\delta_i\}$ имеет следующую форму:

$$(\forall\xi,\ \exists C_\xi):\ \forall\, i\in\boldsymbol{N}(\xi)\ \ 0\le\delta_i<C_\xi. \qquad (2.6)$$

Ещё один необходимый признак сюръективности инъекции φ: $\boldsymbol{N}\to\boldsymbol{N}$ имеет [3, p. 8] с учётом равенства (2.2) даёт следующее предложение.

Теорема 2.2. Ограниченность последовательности $\{\varphi_n\}$ целых чисел $\varphi_n\triangleq\varphi(n)-n$, $n\in\boldsymbol{N}$, является необходимым условием для сюръективности инъективного отображения φ: $\boldsymbol{N}\to\boldsymbol{N}$, т. е. из $\varphi(\boldsymbol{N})=\boldsymbol{N}$ следует, что

$$\lim_{n\in\boldsymbol{N}}(\varphi(n):n)=1. \qquad (2.7)$$

Как показывают примеры, необходимые условия (2.3) и (2.7) сюръективности инъекции φ: $\boldsymbol{N}\to\boldsymbol{N}$ являются независимыми и, следовательно, ни одно из этих условий не может быть достаточным.

Последовательность $\xi=\{1, n_1, n_2,\ldots\}$ назовём последовательностью с ограниченным шагом, если $\exists C$, $C>0$, такое, что $\forall\, i\in N(\xi)$ $n_{i+1}-n_i<C$. Утверждение 2.5,

доказанное ниже, является, как и Теорема 2.2, совсем не очевидным.

Утверждение 2.5. Инъективное отображение $\varphi^*: \ \boldsymbol{N} \to \boldsymbol{N}$, определяющее некоторую последовательность $\xi^* = \{1, m_1, m_2, \ldots\}$, где $m_{i+1} > m_i$, с неограниченным шагом является *антисюръективным* или, другими словами, будет *неосуществимо на всём множестве* $\boldsymbol{N}$.

● Пусть, ξ^* будет последовательностью с неограниченным шагом, т. е. для отображения φ^*, определяющего $\xi^\bullet$, и некоторой последовательности ξ

$$\forall C > 0 \ \exists i(C) \in N(\xi): \ m_{i(C)+1} - m_{i(C)} > C. \qquad (2.8)$$

Теперь при ξ=$\boldsymbol{N}$ и, следовательно, $\boldsymbol{N}(\xi) = \boldsymbol{N}$ имеем $n_i = i+1$. Значит, для $\forall i \in \boldsymbol{N} \backslash \{1\}$ $\varphi^*(i) = m_{i-1}$ и в этом случае (см. (2.1)) $\delta_i^* \triangleq m_i - i$, $i \in \boldsymbol{N}$. Поэтому $\forall i \in \boldsymbol{N}$ $\delta_{i+1}^* - \delta_i^* = (m_{i+1} - (i+1)) - (m_i - i) = m_{i+1} - m_i - 1$. Таким образом, в силу условия (2.8) неравенство $\delta_{i(C)+1}^* - \delta_{i(C)}^* > C-1$ справедливо для $i(C) \in \boldsymbol{N}$. Следовательно, $\delta_{i(C)+1}^* > \delta_{i(C)}^* - 1 + C$. Неограниченность последовательности $\{\delta_i^*\}$, соответствующей паре ($\boldsymbol{N}$, φ^*), следует из последнего неравенства в силу произвольности в (2.8) числа C. Значит, отображение φ^*, определяющее последовательность ξ^* из условия теоремы, является в силу (2.6) *антисюръективным*. ■

Утверждение 2.5 имплицирует следующую теорему.

Теорема 2.3. Пусть $A \triangleq \{n\} \subseteq \boldsymbol{N}$ и $B \triangleq \{m\} \subseteq \boldsymbol{N}$ являются бесконечными подмножества множества $\boldsymbol{N}$. Тогда существует число $C \in \boldsymbol{N}$ такое, что пара (n, m) переменных n и m является C-точной парой переменных (1.2).

●В силу Утверждения 2.5 разность между соседними элементами каждого из множеств A и B ограничена. Следовательно, естественно упорядоченная последовательность $\xi \triangleq A \cup B$ будет также последовательностью с ограниченным шагом, т. е. разность между любой парой её соседних членов ограничена, в том числе, и между соседними элементами подмножеств A и B. Поэтому, как описано в условии (1.2), пара (n, m), (n, m)$\in A \times B$, является C-точной парой. ■

Следующее ниже Теорема 2.4 является [3, 4] следствием условий (2.3), (2.4*a*), (2.4*b*) и (2.7) и обобщает Утверждение 1.2 на множество $\boldsymbol{N}$.

Теорема 2.4. *Не существует биекции между множеством* $\boldsymbol{N}$ *натуральных чисел и его собственным подмножеством* $A \subset \boldsymbol{N}$.

Легко показать, что содержание доказанных выше предложений сохраняется для инъективных отображений φ: $A \to A$, где $A \subset \boldsymbol{N}$.

3. Приложение понятия *C*-точной пары в анализе

Понятие C-точной пары используется в доказательстве следующих нетрадиционных для анализа утверждений: сходимость ограниченной числовой последовательности $(\boldsymbol{a}) \triangleq \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, где $a_n = \sin \ln n$, предельное равенство $\lim r_n$=0 для гармонического ряда $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}$ [3, с. 12], эквивалентность ($r_n \to 0$)$\Leftrightarrow$($a_n \to 0$) [4, с. 104] для произвольного числового ряда и др.

Пример 3.1. (Парадокс Г. Галилея, см. [1, с. 140–146]). Очевидно, что для отображения φ: $\boldsymbol{N} \to \boldsymbol{N}$, заданного формулой $\varphi(n) = n^2$, не выполняется ни одно из необходимых условий сюръективности (2.3), (2.6) и (2.7), но справедливо условие (2.4*b*) антисюръективности и множество $N_\varphi \subset \boldsymbol{N}$ такое, что $N_\varphi \cap \varphi(\boldsymbol{N}) = \varnothing$, является бесконечным. Такие отображения φ: $\boldsymbol{N} \to \boldsymbol{N}$ можно называть (ср. [3, с. 87, 89]) тотально антисюръективными.

Пример 3.2. Докажем сходимость

ограниченной числовой последовательности $(\boldsymbol{a}) \triangleq \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, где $a_n = \sin \ln n$.

● Докажем это утверждение от противного. Пусть последовательность $(\boldsymbol{a})$ является расходящейся. Тогда в силу её ограниченности и леммы Больцано – Вейрштрасса [2, с. 84] найдутся, по крайней мере, два бесконечных подмножества $B \triangleq \{m\}$, $A \triangleq \{k\}$ множества $\boldsymbol{N}$ такие, что $\lim_{m \in B} \sin(\ln m) = b$ и $\lim_{k \in A} \sin(\ln k) = a$, где $\varepsilon \triangleq b - a \neq 0$. Пусть $\varepsilon(m, k) \triangleq \sin \ln m - \sin \ln k$, т.е. $\varepsilon = \lim_{\min\{m, k\} \to \infty} \varepsilon(m, k)$. Так как

$$\varepsilon(m, k) = 2\sin(2^{-1}(\ln m - \ln k) \cdot \cos(2^{-1}(\ln m + \ln k)) \triangleq M \sin(2^{-1}(\ln m/k),$$

где $|M| \leq 2$, то $\varepsilon = \lim_{\min\{m, k\} \to \infty} M \sin(2^{-1}(\ln m/k)$. В последнем предельном равенстве, как следует из Теоремы 2.3, пара (m, k) переменных $m \in B$ и $k \in A$ является *C-точной парой* (1.2′) и

$$m = k + q(k), \text{ где } |q(k)| < C. \tag{3.1}$$

Поэтому $\varepsilon = \lim_{\min\{m, k\} \to \infty} M \sin(2^{-1}(\ln(1 + q(k)/k))) = 0$ в силу (3.1), что противоречит нашему предположению: $\varepsilon \neq 0$. ■

Пример 3.3. В этом примере мы доказываем, следуя [3, p. 12], справедливость для гармонического ряда $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}$ предельного равенства

$$\lim r_n = 0. \tag{3.2}$$

Частичные суммы S_m и S_k этого ряда имеют оценки (см. [5, с. 319–320]):

$$S_m = \sum_1^m n^{-1} = \ln m + C_e + \gamma_m, \; S_k = \sum_1^k n^{-1} = \ln k + C_e + \gamma_k, \tag{3.3}$$

где (см. [5, с. 270]) $C_e = 0{,}57721566490\ldots$ – постоянная Эйлера и $\gamma_n \to 0$. Пусть $R_{k,m} \triangleq S_m - S_k$, т.е. в силу (3.3) $R_{k,m} = \ln(m/k) + \gamma_m - \gamma_k$. Очевидно, что остаток r_k ряда определяется равенством $r_k = \lim_{m \to \infty} R_{k,m}$. Тогда $\lim_{k \to \infty} r_k = \lim_{k \to \infty} (\lim_{p \to \infty} R_{k,p})$. В силу Теоремы 2.3 мы можем считать пару (k, m) в последнем предельном равенстве *C*-точной парой натуральных переменных и в силу (1.2′) положить $m = k + q(k),\; q(k) \in \boldsymbol{Z},\; |q(k)| < C$. Поэтому справедливо равенство (3.2):

$$\lim_{k \to \infty} r_k = \lim_{k \to \infty} (\lim_{p \to \infty} R_{k,p}) = \lim_{k \to \infty} (\ln((k + q(k))/k) + \gamma_{k+p} - \gamma_k) = 0.$$

Для каждого n *n-я* частичная сумма S_n ряда $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}$ есть конечное число, а соответствующий остаток ряда больше любого конечного числа, но при предельном переходе (1.1) всё меняется шаг за шагом наоборот: члены ряда по одному «перебрасываются» из одной суммы (бесконечной) в другую и $S_n \to \infty$, а $r_n \to 0$, о чём формально пишут так: $S = \lim S_n = \infty$ (в данном примере).

Эквивалентность $(r_n \to 0) \Leftrightarrow (a_n \to 0)$ для произвольного числового ряда доказывается [4, с. 104] аналогично.

Пример 3.4. Одна из форм условия Коши фундаментальности числовой последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ имеет [2, с.99] в анализе следующий вид:

$$\left(\forall \varepsilon > 0\; \exists\, n(\varepsilon) \in \boldsymbol{N}\right):\; (\forall m, n > n(\varepsilon)\;\; |a_m - a_n| < \varepsilon). \tag{3.4}$$

В условии (3.4) множества $B \overset{\Delta}{=} \{n\}$ и $A \overset{\Delta}{=} \{m\}$ совпадают с множеством $\boldsymbol{N} \setminus \{1, 2, \ldots, n(\varepsilon)\}$. Поэтому существует инъекция φ: $A \to B$ и $\varphi(A)=B$. Пусть переменные m и n в (3.4) связаны, например, $\tilde{\forall}\, n \in B$ равенством

$$m = \psi(n). \tag{3.5}$$

Выполнимость (осуществимость) этого равенства на почти всём множестве B требуется условием Коши. Для этого отображение $\psi : B \to A$, заданное формулой (3.5), должно удовлетворять необходимым условиям сюръективности (2.3), (2.6) и (2.7) отображения ψ и заключению Теоремы 2.3. Поэтому, в общем случае, всякая пара (p, q) переменных p и q, $(p, q) \in P \times Q \subseteq A \times B$, необходимо должна быть C-точной парой переменных для осуществимости равенства (3.5) на всём подмножестве $Q \subseteq B$.

Условие (3.4) имеет (см. [7, p. 355]) эквивалентную, но более конкретную форму записи:

$$\lim_{\min(m,n)\to\infty} (a_m - a_n) = 0. \tag{3.6}$$

Равенство (3.5) согласуется с предельным условием (3.6), даже если, например, в (3.5) и (3.6) положить $|m - n| < C$ для некоторого $C > 0$ [4, с. 98].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

1. Галилей Г. Избранные труды:– Москва: «Наука», 1964. – Т. 2. –571 с.
2. Зорич В.А. Математический анализ. Часть I..–М.:МЦНМО, 2001.–XVI+664 с.
3. Sukhotin, A M. Alternative analysis principles: Study. - Tomsk: TPU Press, 2002. - 43 p.
4. Сухотин, А. М. Начало высшей математики.– Томск, Изд-во ТПУ, 2004.–148 с.
5. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления:- М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1967.-Т. 2.-664 с.
6. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления:.– М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1969.–Т. 3.–656 с.
7. Weisstein, Eric W. CRC Concise Encyclopedia of Mathematics.–London-New York: Chapman & Hall/CRC, 2002.–3450 p.

THE APPLICATION OF *C*- PAIR CONCEPT ON THE ANALYSIS

Sukhotin A.M.

The Tomsk polytechnical university

The concept of natural variables *C*- pair has been entered as follows: the pair (*m*, *k*) of variables $m \subseteq A$ and $k \subseteq B$ is named as *C-exact* pair, if there exists a number $C>0$ such, that an inequality $|m-k|<C$ is hold for everyone elements *m* and *k* neighboring in $E \overset{\Delta}{=} A \cup B \subseteq \boldsymbol{N}$. Two independent necessary attributes of an injective mapping φ: $\boldsymbol{N} \to \boldsymbol{N}$ surjectivity are received: 1) $\forall\, i \in \boldsymbol{N}\ \exists\ j \in \boldsymbol{N} : \boldsymbol{N}_i \subset \varphi(\boldsymbol{N}_{i+j})$, where $N_i \overset{\Delta}{=} \{1, 2, \ldots, n_i\}$ and 2) $\lim\limits_{n \in \boldsymbol{N}} (\varphi(n) : n) = 1$. The Theorem 2.3 is proved: Let $A \overset{\Delta}{=} \{n\} \subseteq \boldsymbol{N}$ and $B \overset{\Delta}{=} \{m\} \subseteq \boldsymbol{N}$ be two infinite subsets of set $\boldsymbol{N}$. Then $\exists C \in \boldsymbol{N}$ such, that the pair (*n*, *m*) of variables *n* and *m* is *C-exact* pair. There has been proved, in particular, a limit equality $\lim r_n = 0$ for harmonic series $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}$, a convergence of number sequence $(\boldsymbol{a}) \overset{\Delta}{=} \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, where $a_n = \sin \ln n$ etc.