УДК 517.1+517. 98

О *w*-СХОДИМОСТИ, *e*-РАСХОДИМОСТИ ЧИСЛОВЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ И О БЕСКОНЕЧНО БОЛЬШИХ ЧИСЛАХ

Сухотин А.М.

Томский политехнический университет

Подробная информация об авторах размещена на сайте
«Учёные России» - http://www.famous-scientists.ru

В п. 1 статьи введено понятие *С*-точной пары натуральных переменных, получены признаки сюръективности инъективных отображений φ: *N*→*N*, в частности, доказано (Теорема 1.1), что предельное равенство $\lim\limits_{n\in \mathrm{N}} (\varphi(n):n)=1$ является необходимым для сюръективности инъективного отображения φ: $N \to N$. Теорема 1.2 утверждает, что для бесконечных подмножеств $A \triangleq \{n\} \subseteq N$ и $B \triangleq \{m\} \subseteq N$ множества N существует число $C \in N$ такое, что пара (*n, m*) переменных *n* и *m* является *С*-точной парой.. Во втором п. статьи с помощью понятия *С*-точной пары и понятий *е*-расходимости и *w*- сходимости числовой последовательности доказано существование неограниченных конечным числом последовательностей Коши (*ILCS*). В п. 3 статьи определены бесконечно большие числа, как предельные значения *ILCS*, описаны некоторые свойства таких чисел.

1. О *С*-точной паре натуральных переменных и сюръективности инъективных отображений φ: *N*→*N*

Под переменной ниже понимается, по умолчанию, тройка (*x*, *A*, θ), где *x* - символ переменной, *A* – множество значений переменной и θ - порядок во множестве *A* и если $A \subseteq N$, тогда θ означает, по умолчанию, естественный порядок множества *A*, как подмножества множества натуральных чисел. Бесконечность множества N понимается в связи с принципом математической индукции как неограниченная возможность перехода от (*n*) к (*n*+1), а фраза «при предельном переходе в *F*(*n*)» означает следующее:

$$\forall n \in N \;\; F(n) \Rightarrow F(n+1). \qquad (1.1)$$

Принцип предельного перехода (1.1) и равномерная направленность множества *N* мотивируют, почти точно следуя *одинаково упорядоченным переменным* Г. М. Фихтенгольца [6, с. 643–644], введение понятия С-точной пары, которое излагается здесь в более общей формулировке, чем в [5, с. 84].

Пусть множества $A \subset N$ и $B \subset N$ бесконечны, $A \cap B \supseteq \varnothing$ и $E \triangleq A \cup B \subseteq N.$

Определение 1.1. Пара (*m, k*) натуральных переменных $m \in A$ и $k \in B$ называется *С-точной парой*, если для каждых соседних в *E* элементов *m* и *k* найдётся число *C*>0 такое, что

$$|m-k|<C. \qquad (1.2)$$

Условие (1.2) *С*-точности пары (*n, m*) имеет следующую эквивалентную, что очевидно, форму записи:

$$\exists \tilde{C},\ \tilde{C} \ge C, ((\forall\, n\in A\ \exists\ m\in B): m=n+q(n),\ (\forall\, m\in B\ \exists\ n\in A): \\ n=m+p(m)): \quad q(n), p(m)\in \mathbf{Z},\ |q(n)|<\tilde{C}, |p(m)|<\tilde{C}. \qquad (1.2')$$

Ниже, по умолчанию, рассматриваются инъективные функции φ: $\boldsymbol{N}\to\boldsymbol{N}$. Последовательность натуральных чисел $\xi \stackrel{\Delta}{=} \{1, n_1, n_2, \ldots, n_i, \ldots\}\subset\boldsymbol{N}$, называется последовательностью с ограниченным шагом, если $\exists\, C_\xi \in \boldsymbol{N}$ такое, что при $\boldsymbol{N}(\xi) \stackrel{\Delta}{=} \{i:\ \exists\, n_i \in \xi\}\subset\boldsymbol{N}$ $\forall i \in \boldsymbol{N}(\xi)$ $0< n_i - n_{i-1} < C_\xi$, $n_0 \stackrel{\Delta}{=} 1$. Пусть далее, $N_i \stackrel{\Delta}{=} \{1, 2, \ldots, n_i\}$. Последовательность ξ и инъективное отображение φ: $\boldsymbol{N}\to\boldsymbol{N}$ определяют две последовательности $\{\delta_i\}$ и $\{d_i\}$, $i\in N(\xi)$, неотрицательных целых чисел следующим образом:

$$\delta_i \stackrel{\Delta}{=} \max_{n\leqslant n_i} \{\varphi(n)-n_i\}\geq 0,\ d_i \stackrel{\Delta}{=} |D_i|\geq 0,\ D_i \stackrel{\Delta}{=} N_i \setminus \varphi(N_i). \tag{1.3}$$

Если $D_i^- \stackrel{\Delta}{=} \varphi(N_i)\setminus N_i$ и $d_i^- \stackrel{\Delta}{=} |D_i^-|\geq 0$, то очевидно, что $0 \leqslant d_i^- = d_i \leqslant \delta_i$. Действительно, $d_i^- = \delta_i$, если $\{p:\ n_i < p < \delta_i,\ \forall n \leqslant n_i\ p \neq \varphi(n)\}=\varnothing$. В иных случаях $d_i^- < \delta_i$. Отображение φ: $\boldsymbol{N}\to\boldsymbol{N}$ определяет также последовательность $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ целых чисел формулой $\varphi_n \stackrel{\Delta}{=} \varphi(n) - n$. Если $\delta_\varphi \stackrel{\Delta}{=} \sup_{n\in\boldsymbol{N}}\{\varphi(n)-n\}$ и для некоторой последовательности ξ $\delta_\xi \stackrel{\Delta}{=} \sup_{i\in\boldsymbol{N}(\xi)}\{\delta_i\}$, то очевидно, что $\delta_\xi \leq \delta_\varphi$. Легко доказать следующее

Утверждение 1.1. Для всякого инъективного отображения φ: $\boldsymbol{N}\to\boldsymbol{N}$ существует последовательность ξ такая, что

$$\delta_\xi = \delta_\varphi. \tag{1.4}$$

Непосредственное и очевидное следствие определения множества D_i в (1.3) и определения сюръективности отображения φ имеет [5, с. 88] вид:

Утверждение 1.2. Необходимое условие сюръективности каждого инъективного отображения φ: $\boldsymbol{N}\to\boldsymbol{N}$ имеет следующие две эквивалентные формы:

$$\forall\, i\in \boldsymbol{N}(\xi)\ \exists\ j\in \boldsymbol{N}:\ D_i \cap D_{i+j} = \varnothing \text{ и } \boldsymbol{N}_i \subset \varphi(\boldsymbol{N}_{i+j}). \tag{1.5}$$

Ниже для краткости изложения фраза «для почти всех *i*» обозначает «за исключения конечного множества индексов *i*» и по определению мы пишем «$\tilde{\forall}\, i$».

Достаточные признаки сюръективности (*a*) и антисюръективности (*b*) функции φ: $\boldsymbol{N}\to\boldsymbol{N}$ изложены в терминах последовательности $\{d_i\}$ ниже.

Утверждение 1.3. Достаточные условия антисюръективности (*a*) и сюръективности (*b*) инъективного отображения φ: $\boldsymbol{N}\to\boldsymbol{N}$ имеют, соответственно, вид

$$(a)\ \forall C\, \exists\, i(C) \in \boldsymbol{N}(\xi)\ d_{i(C)} > C, \tag{1.6}$$

$$(b)\ \tilde{\forall}\, i \in \boldsymbol{N}(\xi)\ d_i = 0. \tag{1.7}$$

● Каждое число d_i определяет количество элементов *n* из подмножества $\boldsymbol{N}_i$, не имеющих прообраза $\varphi^{-1}(n)$ в $\boldsymbol{N}_i$, поэтому неограниченность последовательности $\{d_i\}$, $i\in \boldsymbol{N}(\xi)$, противоречит условию $\varphi(N) = N$ сюръективности отображения φ. Условие (1.7) гарантирует существование числа i_0 такого, что $\forall j > i_0$ для отображения φ справедлива следующая цепь импликаций:

$$d_j = 0 \Rightarrow D_j = \varnothing \Rightarrow \varphi(N_j) = N_j \Rightarrow \varphi(\boldsymbol{N}) = \boldsymbol{N}\ . \ \blacksquare$$

Про антисюръективное инъективное отображение скажем, что оно *потенциально не осуществимо на всем множестве* ***N***.

Как показывают примеры, условия (1.6) и (1.7) не являются необходимыми для антисюръективности и сюръективности, соответственно, отображения φ.

В [5, с. 86] доказано следующее ниже

Утверждение 1.4 Последовательности $\{\delta_i\}$ *и* $\{d_i\}$, $i \in \boldsymbol{N}(\xi)$, определяемые парой (ξ, φ), удовлетворяют одному и только одному из трёх следующих условий:

$$(a)\ \tilde{\forall}\, i \in \boldsymbol{N}(\xi):\ (\delta_i = 0) \Leftrightarrow (d_i = 0), \tag{1.8}$$

$$(b)\ (\exists C_1, C_2,\ C_2 \le C_1 \in \boldsymbol{N}):\ (\tilde{\forall}\, i \in \boldsymbol{N}(\xi)\ \ (0 < \delta_i < C_1) \Leftrightarrow (0 < d_i < C_2)), \tag{1.9}$$

$$(c)\ i \in \boldsymbol{N}(\xi)\ \ (d_i \to \infty) \Leftrightarrow (\delta_i \to \infty). \tag{1.10}$$

Следствие Утверждений 1.1-1.4 записано ниже [3, p. 8; 4]:

Теорема 1.1. Ограниченность последовательности $\{\varphi_n\}$ целых чисел $\varphi_n \triangleq \varphi(n) - n$, $n \in \boldsymbol{N}$, является необходимым условием сюръективности инъективного отображения φ: $\boldsymbol{N} \to \boldsymbol{N}$, то есть из $\varphi(\boldsymbol{N}) = \boldsymbol{N}$ следует, что

$$\lim_{n \in \mathrm{N}} (\varphi(n) : n) = 1. \tag{1.11}$$

Как показывают примеры, необходимые условия (1.5) и (1.11) сюръективности инъекции φ: $\boldsymbol{N} \to \boldsymbol{N}$ являются независимыми и, следовательно, ни одно из этих условий не может быть достаточным.

Утверждение 1.5. Инъективное отображение φ^*: $\boldsymbol{N} \to \boldsymbol{N}$, определяющее некоторую последовательность $\boldsymbol{\xi}^* = \{1, m_1, m_2, \ldots\}$, где $m_{i+1} > m_i$, с неограниченным шагом является *антисюръективным* или, другими словами, будет *неосуществимо на всём множестве* ***N***.

● Пусть, $\boldsymbol{\xi}^*$ будет последовательностью с неограниченным шагом, т. е. для отображения φ^*, определяющего $\boldsymbol{\xi}^\bullet$,

$$\forall C > 0\, \exists i(C) \in N(\xi):\ m_{i(C)+1} - m_{i(C)} > C. \tag{1.12}$$

Пусть теперь последовательность $\xi \subset \boldsymbol{N}$ такова, что $\forall i \in \boldsymbol{N}(\xi)$ $n_i = i + 1$. Значит, для $\forall i \in \boldsymbol{N}(\xi)$ $\varphi^*(i) = m_{i-1}$ и в этом случае, так как $\delta_i \stackrel{\Delta}{=} \max_{n \leqslant n_i} \{\varphi(n) - n_i\}$ (см. (1.3)) $\delta_i^* = \varphi^*(i+1) - (i+1) = m_i - (i+1)$, $i \in \boldsymbol{N}(\xi)$. Поэтому $\forall i \in \boldsymbol{N}(\xi)$

$$\delta_{i+1}^* - \delta_i^* = (m_{i+1} - (i+2)) - (m_i - i - 1) = m_{i+1} - m_i - 1.$$

Таким образом, в силу условия (1.12) неравенство $\delta_{i(C)+1}^* - \delta_{i(C)}^* > C - 1$ справедливо для $i(C) \in \boldsymbol{N}(\xi)$. Следовательно, $\delta_{i(C)+1}^* > \delta_{i(C)}^* - 1 + C$. Неограниченность последовательности $\{\delta_i^*\}$, $i \in \boldsymbol{N}(\xi)$, определяемой парой (ξ, φ^*), следует из последнего неравенства в силу произвольности в (1.12) числа *C*. Значит, отображение φ^*, задающее последовательность $\boldsymbol{\xi}^*$ из условия теоремы, является *антисюръективным* в силу условий (1.7)-(1.10). ■

Утверждение 1.5 очевидным образом имплицирует следующую теорему.

Теорема 1.2. Пусть $A \stackrel{\Delta}{=} \{n\} \subseteq \boldsymbol{N}$ и $B \stackrel{\Delta}{=} \{m\} \subseteq \boldsymbol{N}$ являются бесконечными подмножества множества $\boldsymbol{N}$. Тогда существует число $C \in \boldsymbol{N}$ такое, что пара (*n*, *m*) переменных *n* и *m* является *C*-точной парой переменных (1.2).

Замечание 1.1. Легко показать, что содержание доказанных выше утверждений сохраняется для инъективных отображений φ: $A \to A$, где $A \subset \boldsymbol{N}$.

Классификация инъективных отображений φ: $\boldsymbol{N} \to \boldsymbol{N}$ проводится по следующим двум признакам: 1) тривиальность, не тривиальная ограниченность, неограниченность последовательности $\{\delta_i\}$, $i \in \boldsymbol{N}(\xi)$, 2) выполнение или невыполнение условия: $\forall i \in \boldsymbol{N}(\xi)\ \exists\, j \in N(\xi):\ D_i \cap D_{i+j} = \varnothing$.

Утверждения 1.1 -1.4 позволяют разбить все инъективные отображения φ: $\boldsymbol{N}\to\boldsymbol{N}$ на шесть непересекающихся классов следующим образом (ср. [5, с. 87-88]).

Определение 1.2. *Инъективное отображением* $\varphi:\ \boldsymbol{N} \to \boldsymbol{N}$ *называется точно сюръективным, если существует такая последовательность* $\xi=(1,\ n_1,\ n_2,\ldots,\ n_i,\ldots)$, *что для* $\forall i \in \boldsymbol{N}(\xi)$ $\delta_i=0$.

Определение 1.3. *Инъективное отображение* $\varphi:\ \boldsymbol{N} \to \boldsymbol{N}$ *называется потенциально сюрьективным, если выполняются следующие два условия*: *a*) *для любой последовательности* $\xi=(1,\ n_1,\ n_2,\ldots,\ n_i,\ldots)$ *существует число* $C_\xi>0$ *такое, что для* $\tilde{\forall} i \in \boldsymbol{N}(\xi)$ $0<\delta_i\le C_\xi$, *b*) $\forall i \in \boldsymbol{N}(\xi)$ $\exists\, j \in N(\xi):\ D_i \cap D_{i+j} = \varnothing$.

Определение 1.4. *Инъективное отображением* $\varphi:\ \boldsymbol{N} \to \boldsymbol{N}$ *называется потенциально антисюръективным, если выполняются следующие два условия*:

a) *существует такая последовательность* $\xi=(1,\ n_1,\ n_2,\ldots,\ n_i,\ldots)$, *что для любого числа* $C>0$ *найдётся такое число* $i(\xi, C) \in \boldsymbol{N}(\xi)$, *что* $\delta_{i(\xi,\,C)}>C$,

b) $\forall i \in \boldsymbol{N}(\xi)$ $\exists\, j \in N(\xi):\ D_i \cap D_{i+j} = \varnothing$.

Определение 1.5. Инъективное отображение $\varphi:\ \boldsymbol{N} \to \boldsymbol{N}$ называется *C*-конечно антисюръективным, если последовательность $\{\delta_i\}$, определяемая парой (φ, ξ), является ограниченной последовательностью и, кроме того,

$$\exists(C, i_0, N_\varphi),\ C>0,\ i_0 \in N(\xi),\ N_\varphi \subset \boldsymbol{N}:\ \forall\, i > i_0\ \ N_\varphi \subset D_i \text{ и } |N_\varphi| = C. \tag{1.13}$$

Очевидно, что подмножество N_φ не пересекается с образом $\varphi(\boldsymbol{N})$ отображения $\varphi:\ \boldsymbol{N} \to \boldsymbol{N}:\ N_\varphi \cap \varphi(\boldsymbol{N}) = \varnothing$.

Определение 1.6. Инъективное отображением $\varphi:\ \boldsymbol{N} \to \boldsymbol{N}$ называется *t*-антисюръективным, если соответствующая последовательность $\{\delta_i\}$ является не ограниченной последовательностью и, кроме того, для этого отображения выполняется условие (1.13)

Определение 1.7. Инъективное отображением $\varphi:\ \boldsymbol{N} \to \boldsymbol{N}$ называется тотально антисюръективным, если для этого отображения подмножество N_φ множества $\boldsymbol{N}$, $N_\varphi \cap \varphi(\boldsymbol{N}) = \varnothing$, является бесконечным множеством.

Инъективные отображения $\varphi:\ \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}$ допускают аналогичную классификацию для каждого бесконечного собственного подмножества $\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{N}$.

Заключение 1.1. Для каждого антисюръективного инъективного отображения $\varphi:\ \boldsymbol{N} \to \boldsymbol{N}$ существует пара (N_1, N_2) таких бесконечных собственных подмножеств N_1 и N_2 множества $\boldsymbol{N}$, что $\tilde{\varphi}(N_1) = N_2$ и $\tilde{\varphi}^{-1}(N_2) = N_1$, где $\tilde{\varphi} \triangleq \varphi_{|N_1}$.

Например, множество $E \triangleq \{k:\ \exists n\in\boldsymbol{N},\ k=2n\}$ есть множество чётных натуральных чисел, $E \subset \boldsymbol{N}$. При этом очевидно, что отображение φ: $\boldsymbol{N}\to\boldsymbol{N}$, заданное формулой $\varphi(n) \triangleq k=2n$, является тотально антисюръективным. Тогда, в соответствии с Заключением 1.1, $E= N_2$ и $N_1=\{k:\ k\in\boldsymbol{N},\ \exists n\in\boldsymbol{N},\ k= n/2\} \subset \boldsymbol{N}$, (см. также п.3).

2. О сходимости числовых последовательностей

Числовая последовательность $(\boldsymbol{a}) \stackrel{\Delta}{=} \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется сходящейся к конечному числу A, если $\lim(a_n) = A$. В противном случае, то есть если $\lim(a_n)$ не существует или равен $\pm\infty$, последовательность $(\boldsymbol{a})$ называется в анализе расходящейся ($\boldsymbol{DS}$). Числовая последовательность $(\boldsymbol{a})$ называется в анализе фундаментальной или *последовательностью Коши* ($\boldsymbol{CS}$), если для неё выполняется условие

$$\big(\forall \varepsilon > 0\ \exists\, n(\varepsilon) \in N\big):\ (\forall m\,,\, n \ge n(\varepsilon)\ \ |a_m - a_n| < \varepsilon). \tag{2.1}$$

Условие (2.1) имеет [7, p. 355] эквивалентную, но более конкретную форму:

$$\lim_{\min(m,n)\to\infty}(a_m - a_n) = 0. \tag{2.2}$$

Эта форма определения фундаментальной последовательности показывает, что пару (m, n) в (2.2) можно считать (Теорема 1.2) C-точной парой (1.2).

Очевидно, что $\{(\boldsymbol{a})\}=\{\boldsymbol{CS}\}\cup\{\boldsymbol{DS}\}$. В анализе принято также считать, что

$$\{\boldsymbol{CS}\}\cap\{\boldsymbol{DS}\}=\varnothing. \tag{2.3}$$

Для критического анализа равенства (2.3) мы введём следующее новое в теории числовых последовательностей понятие [ср. 5, с. 96].

Определение 2.1. *Числовая последовательность* $(\boldsymbol{a})$ *называется e-расходящейся* (e-$\boldsymbol{DS}$), *если существуют такие две бесконечные подпоследовательности* $\xi_1, \xi_2 \subset \boldsymbol{N}, \xi_1 \cap \xi_2 = \varnothing$, *что выполняется следующее условие*:

$$\exists(\delta > 0\,,\ n^* \in \boldsymbol{N}) : \forall (m,k) \in (\xi_1, \xi_2)\ \ m,\, k > n^*\ |a_m - a_k| \ge \delta. \tag{2.4}$$

Сравнением условий (2.1)–(2.2) и (2.4) доказывается следующая теорема.

Теорема 2.1. *Всякая числовая последовательность является либо фундаментальной последовательностью, либо e-расходящейся, то есть*

$$\forall(\boldsymbol{a})\ (\boldsymbol{a})\in\{\boldsymbol{CS}\}\cup\{e\text{-}\boldsymbol{DS}\} \text{ и } \{\boldsymbol{CS}\}\cap\{e\text{-}\boldsymbol{DS}\}=\varnothing. \tag{2.5}$$

Легко показать, что

$$\{e\text{-}\boldsymbol{DS}\}\subseteq\{\boldsymbol{DS}\} \tag{2.6}$$

Пример последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $a_n \stackrel{\Delta}{=} n^{\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, показывает, что

$$\{e\text{-}\boldsymbol{DS}\}\subset\{\boldsymbol{DS}\}. \tag{2.7}$$

● Последовательность $\{n^{\alpha}\}_{n=1}^{\infty}$ является расходящейся, так как при $0 < \alpha < 1$ $\lim n^{\alpha} = \infty$. С другой стороны, в силу бесконечности в (2.4) подмножеств–последовательностей $\xi_1, \xi_2 \subset \boldsymbol{N}, \xi_1 \cap \xi_2 = \varnothing$, пара (m, n) переменных $m > n^*$, $m \in \xi_1$, и $n > n^*$, $n \in \xi_2$, является (Теорема 1.2) C- точной парой (1.2′). Поэтому существует сколь угодно много таких пар $(\hat{m}, \hat{n}) \in (\xi_1, \xi_2)$, что $\hat{m} = \hat{n} + q(\hat{n})$, где числа $q(\hat{n})$, $\hat{n} \in \xi_2$, являются членами ограниченной последовательности целых чисел. Далее мы рассмотрим функцию $f:\ R_+ \to R_+$, определённую формулой $f(x) = (x + q(x))^{\alpha} - x^{\alpha}$. Очевидно, что значение $f(\hat{n}) = (\hat{n} + q(\hat{n}))^{\alpha} - \hat{n}^{\alpha}$ функции f совпадает с разностью $(\hat{m}^{\alpha} - \hat{n}^{\alpha})$ при $\hat{m} = \hat{n} + q(\hat{n})$. Легко показать, что при $x \to \infty$ $\lim f(x) = 0$. Следовательно, условие (2.5) будет нарушено, по крайней мере, для одной какой-нибудь пары $(\hat{m}_0, \hat{n}_0) \in (\xi_1, \xi_2)$ значений $\hat{m}_0 > n^*$ и $\hat{n}_0 > n^*$. Это доказывает, что последовательность $\{n^{\alpha}\}$, $0<\alpha<1$, не является *e-расходящейся*. ■

Поэтому вместо условия (2.6) имеет место строгое включение (2.7). И, следовательно, с учётом (2.5) вместо (2.3) справедливо неравенство

$$\{\boldsymbol{CS}\}\cap\{\boldsymbol{DS}\}\neq\varnothing. \qquad (2.8)$$

Введём важное для дальнейшего изложения ещё одно понятие [5, с. 97].

Определение 2.2. *Числовая последовательность* ($\boldsymbol{a}$) *называется w-сходящейся* (*w-**CS***), *если для неё выполняется следующее условие*:

$$(\forall\varepsilon>0\ \exists\, n(\varepsilon)\in N):\ (\forall\ n\geq n(\varepsilon)\ \ |a_{n+1}-a_n|<\varepsilon). \qquad (2.9)$$

Сейчас мы докажем главное утверждение этой статьи, используя Определение 2.1 *e*-расходящейся последовательности и понятие *C*-точной пары (1.2′).

Теорема 2.2. *Множество фундаментальных последовательностей совпадает с множеством w-сходящихся последовательностей*

$$\{\boldsymbol{CS}\}=\{w\text{-}\boldsymbol{CS}\}. \qquad (2.10)$$

● Предположим противное, что существует числовая последовательность ($\boldsymbol{a}$), удовлетворяющая условию (2.9), но не являющаяся фундаментальной. Тогда в силу (2.5) она будет *e*-расходящейся, то есть для неё справедливо условие (2.4). В силу бесконечности последовательностей ξ_1, ξ_2 в (2.4) пара (m, k) переменных, $(m, k)\in(\xi_1, \xi_2)$, является *C*-точной парой (см. (1.2) и (1.2′)). Тогда, по крайней мере, для одного $q_0\in\boldsymbol{N}$, $0<q_0<\tilde{C}$, существует бесконечное множество таких пар $(m^*,\ k^*)\in(\xi_1,\xi_2)$, $m^*,\ k^*>n^*$, что $m^*=k^*+q_0$, например, и, в силу (2.4)

$$|a_{m^*}-a_{k^*}|=|a_{k^*+q_0}-a_{k^*}|\geq\delta. \qquad (2.11)$$

С другой стороны, пусть в (2.9) $\varepsilon\overset{\Delta}{=}\delta/q_0>0$. Тогда в силу неравенства

$$|a_{n+q_0}-a_n|\leq|a_{n+q_0}-a_{n+q_0-1}|+|a_{n+q_0-1}-a_{n+q_0-2}|+\cdots+|a_{n+1}-a_n|$$

и условия (2.9) имеет место $\forall\ n\geq n(\varepsilon)$ следующая оценка:

$$\left|a_{n+q_0}-a_n\right|<\varepsilon q_0=\delta. \qquad (2.12)$$

Пусть $n^{**}=\sup\{n^*,\ n(\varepsilon)\}$. Неравенство (2.12) справедливо для всех n, $n>n^{**}$, в том числе, и при $n=k^*$: $\left|a_{k^*+q_0}-a_{k^*}\right|<\delta.$ Это противоречит (2.11).■

Следствие Теоремы 2.2. *Не всякая фундаментальная последовательность* ($\boldsymbol{a}$) *ограничена конечным числом.*

Например, последовательность $\{\ln n\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяет условию (2.9), но её предельное значение больше любого конечного числа. Каждую такую числовую последовательность мы будем обозначать символом ***ILCS***.

3. О бесконечно больших числах

Следствие Теоремы 2.3 мотивирует введение следующего понятия.

Определение 3.1. *Предельное значение фундаментальной последовательность* ($\boldsymbol{a}$), *не ограниченной конечным числом, мы называем бесконечно большим числом* (***ILN***), *определяемым этой последовательность* ($\boldsymbol{a}$), *и пишем* $a_{\infty}\overset{\Delta}{=}\Omega(a)$.

В нестандартном анализе о ***ILN*** говорят (см. [1, с. 16, 21 и далее]) как о нестандартных, неосуществимых, актуально бесконечно больших или недоступных числах. Мы множеству {***ILN***} припишем символ **Ω.**

Утверждение 3.1. *Последовательность* (***a***), *определённая для всех* $n \in \boldsymbol{N}$ *формулой* $a_n = (n)^{1-\alpha}$, $\alpha > 0$, *является фундаментальной.*

● $$a_{n+1} - a_n = (n+1)^{1-\alpha} - n^{1-\alpha} = \frac{n+1}{(n+1)^{\alpha}} - \frac{n}{n^{\alpha}} < \frac{n+1}{n^{\alpha}} - \frac{n}{n^{\alpha}} = \frac{1}{n^{\alpha}} \to 0.$$ ■

Однако, последовательность (***a***), определённая для всех $n \in \boldsymbol{N}$ формулой $a_n = \alpha \cdot n$, является для всех $\alpha \neq 0$ *е*-расходящейся, что очевидно.

Утверждение 3.1 допускает следующее обобщение – переход от теории последовательностей к анализу функций:

Теорема 3.1. *Неограниченная дифференцируемая в* $\pm\infty$ *функция* $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ *сходится к соответствующему* ***ILN*** $\Omega(f)$ *тогда и только тогда, когда* $f'(\infty) = 0$.

●Предельный переход в формуле Лагранжа, записанной для функции *f*:

$$f(n+1) - f(n) = f'(\xi)((n+1) - n), \ n < \xi < n+1,$$

составляет доказательство Теоремы 3.1. ■

С помощью Теоремы 3.1 легко можно доказать следующее

Утверждение 3.2. *Последовательность* (***a***), *определённая для всех* $n \in \boldsymbol{N}$ *формулой* $a_n = Cn^{1-\alpha}(\ln n)^{\beta}$, *при* $\alpha > 0, \ \beta, C \in \boldsymbol{R}$, *является* ***ILCS***.

Утверждение 3.2 имеет следующее (см. [2, с. 536-537]) следствие:

Утверждение 3.3. *Во множестве* $\boldsymbol{\Omega}$ *бесконечно больших чисел* ***ILN*** *нет ни наибольшего, ни наименьшего бесконечно большого числа.*

Используя Теорему 3.1, можно доказать следующие свойства для предельных значений $f(\infty), \ g(\infty)$ не ограниченных конечным числом функций $f, g: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ ($f(\infty), \ g(\infty) \in \boldsymbol{\Omega}$), определив тем самым алгебру во множестве **Ω:**

Утверждение 3.4. $Cf(\infty) + g(\infty) \in \boldsymbol{\Omega}$, $C \in \boldsymbol{R}$; $Cf(\infty) \in \boldsymbol{\Omega}$, $C \neq 0$.

Утверждение 3.5. $\left(f(\infty) \cdot g(\infty) > 0, \ \dfrac{f(\infty)}{g(\infty)} = 1 \right) \Rightarrow \left(\left(f(\infty) - g(\infty) \right) \in \boldsymbol{R} \right)$.

Утверждение 3.6. $\left(f' = o\left((g)^{-1} \right), \ g' = o((f)^{-1}) \right) \Rightarrow \left(f(\infty) \cdot g(\infty) \in \Omega \right)$.

Утверждение 3.7. $\left(f = O(g^2) \right) \Rightarrow \left(\dfrac{f(\infty)}{g(\infty)} \in \Omega \right)$.

Утверждение 3.8. Если $C \in \boldsymbol{R}$ и $C > 0$, то $\dfrac{1}{f(\infty)} < C$.

Утверждение 3.8 позволяет корректно определить бесконечно малые числа, почти также как это сделано в [1, с. 8-11, 23 и далее].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

1. Гордон Е.И., Кусраев А.Г., Кутателадзе С.С. Инфинитезимальный анализ. Ч. 1. – Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2001

2. Степанов В.В. // Математический сборник, Т. 30 (1918), вып. 4. – С. 535.

3. Sukhotin A.M. Alternative analysis principles: Study. - Tomsk: TPU Press, 2002.

4. Sukhotin A.M. From G. Galilei's paradox to alternative analysis // 4ecm, List of posters, Section 13.13 (Real analysis), Stockholm, 2004.

5. Сухотин А.М. Начало высшей математики. Томск: Изд-во ТПУ, 2004.

6. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1969.–Т. 3.

7. Weisstein Eric W. CRC Concise Encyclopedia of Mathematics. 2[nd] ed. – London-New York: Chapman&Hall/CRC, 2002.

ABOUT *w*-CONVERGENCE, *e*-DIVERGENCE OF NUMBER SEQUENCES AND ABOUT THE INFINITE LARGE NUMBERS

Sukhotin A.M.
The Tomsk Polytechnic university

The *C-exact* pair natural variables concept has been entered into item 1 of article, the attributes of injective mappings φ: ***N***→***N*** surjectivity have been received, in particular, it is proved (Theorem 1.1), that limiting equality $\lim\limits_{n\in\mathrm{N}} (\varphi(n):n)=1$ is necessary for surjectivity of an injective mapping φ. Theorem 1.2 affirms, that for infinite subsets $A\triangleq\{n\}\subseteq \boldsymbol{N}$ and $B\triangleq\{m\}\subseteq \boldsymbol{N}$ of set $\boldsymbol{N}$ there exists a number $C\in \boldsymbol{N}$ such, that the pair (*n, m*) variables *n* and *m* is *C-exact pair*. In second part of this article an existence of unlimited by final number Cauchy sequences (*ILCS*) is proved by means both of concept *C*-pair variables and concepts *of e-divergence* and *w- convergence* of number sequence. In 3-d item of paper the infinitely greater numbers have been determined as limiting values of the *ILCS,* some properties of such numbers are described too.