УДК 517.1+517. 98

О СХОДИМОСТИ ЧИСЛОВЫХ РЯДОВ

Сухотин А.М.

Томский политехнический университет

Подробная информация об авторах размещена на сайте
«Учёные России» - http://www.famous-scientists.ru

В статье понятие *C*–точной пары натуральных переменных применяется при доказательстве достаточности необходимого признака сходимости числового ряда: ($r_n \to 0$)⇔($a_n \to 0$). Этот же результат доказан с использованием сходимости к бесконечно большим числам неограниченных конечными числами последовательностей Коши. При рассмотрении свойств числовых рядов из понятий частичной суммы числового ряда и его остатка выделены понятия значений этих сумм, конечной и бесконечной, соответственно. Такой подход сделал прозрачным доказательство независимости сходимости знакопеременного числового ряда от перестановки слагаемых этого ряда. Приведёны иллюстративные примеры.

Используя понятие C-точной пары [4], мы доказали [2], [4], что условие Коши $\left(\forall \varepsilon > 0\, \exists\, n(\varepsilon) \in N\right)$: $(\forall m\,, n \geq n(\varepsilon)\ \left|a_m - a_n\right| < \varepsilon)$ сходимости числовая последовательность (***a***) можно записать в эквивалентной и соответствующей определению Э. Вайсштейна $\lim\limits_{\min(m,n)\to\infty}(a_m - a_n) = 0$ [12, p. 355] следующей форме

$$(\forall \varepsilon > 0\, \exists\, n(\varepsilon) \in N):\ (\forall\ n \geq n(\varepsilon)\ |\, a_{n+1} - a_n\,| < \varepsilon). \tag{0.1}$$

Там же предельное значение неограниченной конечным числом последовательности Коши (***a***) мы назвали бесконечно большим числом $\Omega(a)$ и $\{\,\Omega(a)\,\} \triangleq$ **Ω.**

1. О достаточности необходимого признака сходимости числового ряда

Обозначим символом Σ_n сумму *n* первых членов a_i числовой последовательности (***a***)$\triangleq (a_n)_{n=1}^{\infty} \triangleq (a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n, \ldots)$, n∈***N***: $\Sigma_n \triangleq a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, а символом S_n – число, равное значению суммы Σ_n. Так что

$$\Sigma_{n+1} = \Sigma_n + a_{n+1} \text{ и } S_{n+1} = S_n + a_{n+1},\ n\in \boldsymbol{N}. \tag{1.1}$$

Определение 1.1. *Числовым рядом, определяемым последовательностью* (***a***), *назовём пару последовательностей* (Σ_n) *и* (S_n), *заданных посредством* (1.1), *и будем писать*

$$\Sigma_\infty(\boldsymbol{a}) \triangleq \sum_{n=1}^{\infty} a_n \triangleq a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \triangleq \boldsymbol{A}. \tag{1.2}$$

Ниже суммирование у символа Σ предполагается, по умолчанию, от 1 до ∞, что означает неограниченную возможность перехода от суммы Σ_n к сумме Σ_{n+1}. Равенство $a_n = f(n)$, *n*∈***N***, называют также формулой общего члена ряда ***A***.

Определение 1.2. *Числовой ряд* ***A*** *называется сходящимся к числу A, если к этому числу сходится числовая последовательность* (S_n) *значений* S_n *частичных сумм* Σ_n *этого ряда. Предельное значение A последовательности* (S_n) *называют суммой ряда* ***A*** *и пишут*

$$\lim S_n = A. \qquad (1.3)$$

Если предел (1.3) не существует или равен ±∞, то соответствующий ряд ***A*** называется в анализе расходящимся. Из множества расходящихся в классическом смысле числовых рядов мы выделяем класс рядов, для каждого из которых числовая последовательность (S_n) значений S_n частичных сумм Σ_n сходится к соответствующему бесконечно большому числу (***ББЧ***) $\Omega(a)$.

Необходимым для (1.3) является выполнение очевидного равенства

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0. \qquad (1.4)$$

Равенство (1.2) можно записать в следующем виде

$$(\boldsymbol{A})=\sum a_n = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) + (\sum_{n+1}^{\infty} a_i) \triangleq \Sigma_n + \rho_n. \qquad (1.5)$$

Бесконечную сумму $\rho_n \triangleq \sum_{n+1}^{\infty} a_i$ в (1.5), называемую *n*-м остатком ряда ***A***, обычно не отличают при записи от её значения r_n. Тривиальность предела последовательности (r_n) значений r_n остатков ρ_n ряда ***A*** является как и (1.4) необходимым для существования суммы ряда ***A***, то есть для предельного равенства (1.3):

$$\lim_{n\to\infty} r_n = 0. \qquad (1.3')$$

Необходимые признаки (1.4) и (1.3′) объединяет ниже Теорема 1.1 [1 p. 12].

Теорема 1.1. *Для произвольного числового ряда* $\sum a_n$ *справедлива при* $n\to\infty$ *следующая эквивалентность*: $(r_n \to 0) \Leftrightarrow (a_n \to 0)$.

● Так как $a_n = r_{n-1} - r_n$, то, очевидно, что $(r_n \to 0) \Rightarrow (a_n \to 0)$. Пусть, далее, $S_p \triangleq \sum_{i=1}^{p} a_i$ и $S_k \triangleq \sum_{i=1}^{k} a_i$, *p*>*k*, суть значения соответствующих частичных сумм Σ_p и Σ_k ряда (*A*) и $\Sigma_k \subset \Sigma_p$. Если $R_{k,p} \triangleq \Sigma_p - \Sigma_k$, то для каждого *k* остаток ряда $\rho_k \triangleq \lim_{p\to\infty} R_{k,p}$ и $\lim_{p>k\to\infty} \rho_k = \lim_{k\to\infty}(\lim_{p\to\infty} R_{k,p})$. Здесь, не нарушая общности рассуждений, пару (k, p) переменных *k* и *p* можно считать *C*-точной парой [4] и принять, например, *p*=*k*+*q*(*к*), где $0 < q(k) < C$. Поэтому в силу (1.4)

$$\lim_{k\to\infty} r_k = \lim_{k\to\infty}(\lim_{p\to\infty} R_{k,p}) = \lim_{k\to\infty}(a_{k+1} + a_{k+2} + \ldots + a_{k+q(k)}) = 0. \blacksquare$$

У другой формулировки Теоремы 1.1 доказательство короче.

Теорема 1.2. *Необходимое условие* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ *сходимости числового ряда является достаточным условием его сходимости.*

● Предельное равенство $\lim(S_n - S_{n-1}) = \lim a_n = 0$ есть условие (0.1) фундаментальности последовательности (S_n) значений S_n частичных сумм Σ_n числового ряда **A.** Поэтому для такого ряда справедливо предельное равенства (1.3), где *A* есть либо конечное число, либо равно некоторому ***ББЧ***. И, значит, $r_n \to 0$. ■

2. О сходимости знакопеременных рядов

Числовой ряд $\boldsymbol{A}=\sum a_n$ называется знакопеременным, если количества его как положительных, так и отрицательных слагаемых не ограниченны. Такой ряд называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд, составленный из модулей его слагаемых. В противном случае говорят об «условной» или «неабсолютной» сходимости знакопеременного ряда. Очевидно, что абсолютно сходящиеся ряды сходятся «быстрее», чем условно сходящиеся, что мы и покажем на Примере 3.3.

В своей диссертации Бернгард Риман излагает [5, I. XII. 3] одно из свойств знакопеременных рядов следующим образом:

«*… бесконечные ряды разделяются на два существенно различных класса, смотря потому, остаются ли они сходящимися, если сделать все слагаемые положительными, или же этого нет. В первом случае члены ряда могут быть как угодно переставляемы, во втором же сумма ряда, напротив, зависит от порядка членов. В самом деле, пусть в ряде второго класса положительные члены будут*

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,$$

а отрицательные

$$-b_1,\ -b_2,\ -b_3,\ \ldots\ .$$

Тогда ясно, что суммы $\sum a$ *и* $\sum b$ *должны быть расходящимися; действительно, если бы обе были сходящимися, то и весь данный ряд сходился бы после выравнивания знаков; если бы сходилась только одна, то данный ряд был бы расходящимся. Нетрудно видеть, что при надлежащей перестановки членов ряд может принять любое заданное значение C. В самом деле, станем брать по очереди сначала положительные члены ряда, пока их сумма не превысит C, затем отрицательные, пока сумма не станет меньше C; при этом отклонение суммы от C никогда не станет больше, чем абсолютное значение члена, предшествующего последней перемене знака. Но так как величины a и b с возрастанием индекса становятся бесконечно малыми, то отклонения от C при достаточном продолжении ряда станут сколь угодно малыми, а это значит, что ряд сходится к величине C …*».

Ниже излагается иная точка зрения по этому вопросу, основанная в частности на разделении понятий частичной суммы числового ряда и его остатка на собственно суммы и значения этих сумм.

Следуя почти точно Б. Риману, мы вводим для знакопеременного числового ряда $\boldsymbol{A}$ такие обозначения:

$$p_k \triangleq a_{i_k} \geq 0,\ q_j \triangleq a_{i_j} < 0,\ i_k, i_j \leq n\,,\ P_m \triangleq \sum\nolimits_{k=1}^{m} p_k\,,\ Q_l \triangleq \sum\nolimits_{j=1}^{l} q_j\,,\ l+m=n\,. \qquad (2.1)$$

Тогда $\forall n \in \boldsymbol{N}$, $S_n = P_m + Q_l$, и, как доказано ниже (Теорема 2.3), если $\lim P_m \triangleq P_\infty$, $\lim Q_l \triangleq Q_\infty$, то всегда верно равенство $A = Q_\infty + P_\infty$. Вначале докажем для знакопеременного числового ряда $\boldsymbol{A}$ следующее ниже утверждение [1, р. 18].

Теорема 2.1. *Ряд* $\boldsymbol{B}$*, являющийся произвольной перестановкой знакопеременного не абсолютно сходящегося к некоторому числу A ряда* $\boldsymbol{A}$*, сходится к тому же числу A.*

● Пусть сходящийся к числу B ряд $\boldsymbol{B}$:

$$B = \sum b_j = \tilde{S}_n + \tilde{r}_n \qquad (2.2)$$

получается отображением φ: $\boldsymbol{N} \to \boldsymbol{N}$, φ($k$)=$j$, $a_k \triangleq b_j$, из ряда $\boldsymbol{A}$:

$$A = \Sigma_n + \rho_n = \sum_{1}^{n} a_j + \sum_{n+1}^{k(n)} a_i + \sum_{k(n)+1}^{\infty} a_i \triangleq \Sigma_n + \sigma(n) + \rho_{k(n)}\,, \qquad (2.3)$$

где $k(n) \triangleq \max\{k$: $a_k \triangleq b_j$, $j \leq n\}$. Будем шаг за шагом выполнять отображение φ: $\boldsymbol{N} \to \boldsymbol{N}$, и одновременно строить последовательность ($\tilde{\Sigma}_n$) частичных сумм $\tilde{\Sigma}_n$ ряда $\boldsymbol{B}$

и последовательность ($\tilde{S}_n$) значений $\tilde{S}_n$ этих сумм. Получающийся на каждом шаге ряд будем обозначать символом $\boldsymbol{B}(n)$:

$$\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}(1) \to \boldsymbol{B}(2) \to \ldots \to \boldsymbol{B}(n) \to \ldots. \tag{2.4}$$

Следуя [6, 3.52], ряд $\boldsymbol{B}(n)$ называется перестановкой ряда $\boldsymbol{B}(n\text{-}1)$. Как результат процесса (2.4), мы получим из тождества

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \overset{\Delta}{=} \sum a_i \tag{2.5}$$

для каждого $n \in \boldsymbol{N}$ следующие равенства:

$$\sum a_i = \Sigma_{k(n)} + \rho_{k(n)} = \Sigma_n + \sigma(n) + \rho_{k(n)} = \tilde{\Sigma}_n + \tilde{\sigma}(n) + \rho_{k(n)}, \tag{2.6}$$

где сумма $\tilde{\sigma}(n) \overset{\Delta}{=} \sum_{i=n+1}^{k(n)} a_{n_i}$, $n_i < k(n)$, содержит те слагаемые из частичной суммы $\Sigma_{k(n)}$ ряда $\boldsymbol{A}$, которые не вошли в частичную сумму $\tilde{\Sigma}_n$ ряда $\boldsymbol{B}\,(n)$ и $\sigma(n) = \sum_{i=n+1}^{k(n)} a_i$. Эти преобразования иллюстрирует Рисунок 2.1:

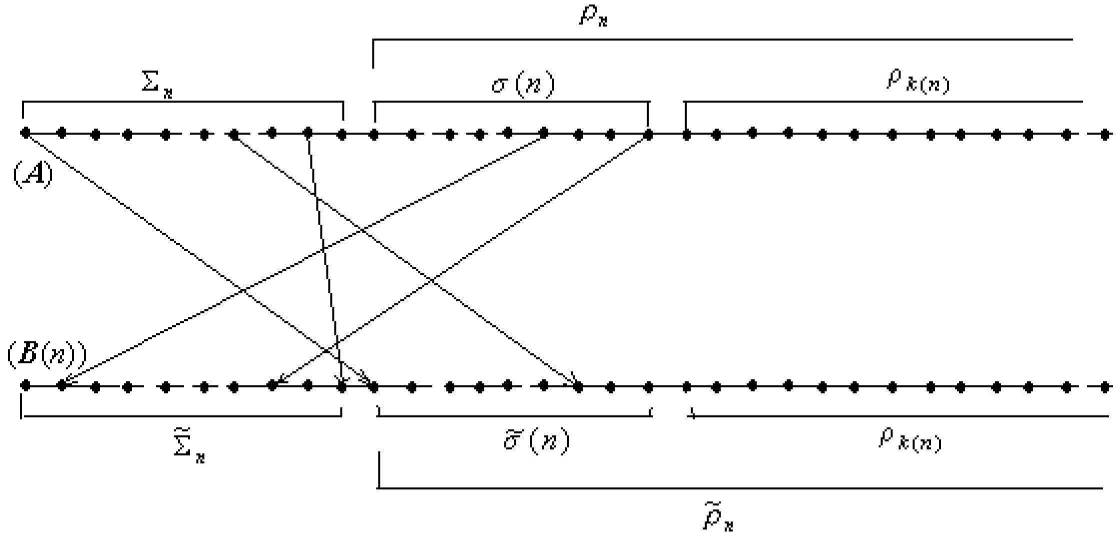

Рис. 2.1.

Отметим, что при переходе $\boldsymbol{B}\,(n) \to \boldsymbol{B}\,(n+1)$ переставляется не более одного из не более чем $k(n+1) - n$ первых слагаемых остатка $\tilde{\rho}_n$ ряда $\boldsymbol{B}\,(n)$, а все члены этой суммы, предшествующие переставляемому слагаемому, сдвигаются в $\tilde{\rho}_n$ на одну позицию «в право». Отметим также ещё, что количества слагаемых в суммах $\sigma(n)$ и $\tilde{\sigma}(n)$ равны. Из (2.6) получаются для всех $n \in \boldsymbol{N}$ следующие равенства

$$\rho_n = \sigma(n) + \rho_{k(n)} \text{ и } \tilde{\rho}_n = \tilde{\sigma}(n) + \rho_{k(n)}, \tag{2.7}$$

$$\Sigma_n + \sigma(n) = \tilde{\Sigma}_n + \tilde{\sigma}(n). \tag{2.8}$$

Обозначая значения сумм $\tilde{\sigma}(n)$ и $\sigma(n)$ символами $\tilde{s}(n)$ и $s(n)$, соответственно, получим эквивалентное (2.8) числовое равенство

$$S_n + s(n) = \tilde{S}_n + \tilde{s}(n), \tag{2.9}$$

Равенство (2.8) и, следовательно, (2.9) для каждого $n \in \boldsymbol{N}$ можно доказать методом математической индукции, исходя из тождества (2.5).

Так как сумма $\sigma(n)=\sum_{i=n+1}^{k(n)} a_i$ входит в остаток ρ_n ряда ***A***, а сумма $\tilde{\sigma}(n)$ входит в остаток $\tilde{\rho}_n$ ряда ***B***(n), то в силу (2.3)–(2.7) и (2.9) $s(n)\underset{n\to\infty}{\to}0$, $\lim\limits_{n\to\infty} r_{k(n)}=0$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\tilde{r}_n=\lim\limits_{n\to\infty}\tilde{s}(n)$.

Теперь мы получаем из (2.9) при предельном переходе следующий результат:

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\tilde{S}_n+\lim_{n\to\infty}\tilde{s}(n)\text{, то есть }\lim_{n\to\infty}\tilde{r}_n=A\text{-}B.$$

Таким образом, при $n\to\infty$ в силу предположений $\tilde{S}_n\to B$, $S_n\to A$ следует импликация: ($\tilde{r}_n\to 0$, $r_n\to 0$)$\Rightarrow$(B=A). ■

В общем случае, из равенства (2.8) следует при $S_n\to A$ и $r_n\to 0$ эквиваленция: ($\tilde{S}_n\to B$)$\Leftrightarrow$($\tilde{r}_n\to$(A-B)), то есть доказано следующее утверждение:

Теорема 2.2. *Если для произвольного числа B из членов сходящегося к числу A знакопеременного ряда **A** построена произвольным образом последовательность* (Σ_n^*) *сумм* Σ_n^*, *последовательность значений* S_n^* *которых сходятся к числу B, то последовательность* (r_n^*), *получающихся при этом остатков* r_n^*, *сходится к числу A-B.*

Замечание 2.1. В доказательстве Теоремы 2.1 условие не абсолютной сходимости исходного ряда (***A***) не использовалось, то есть Теоремы 2.1 и 2.2 справедливы для любого сходящегося ряда. Но в случае не абсолютной сходимости ряда (***A***) Q_∞ и P_∞ будут равны соответствующим бесконечно большим числам: $Q_\infty, P_\infty\in\mathbf{\Omega}$, так как, например, при $m\to\infty$ $Q_m-Q_{m-1}=q_m\to 0$. Это предельное равенство является условием (0.1) фундаментальности числовой последовательности (Q_m). Поэтому Теорему 2.1 следует считать обобщением на знакопеременные ряды соответствующей Теоремы Дирихле о знакоположительных рядах.

Более того, Теорема 2.2 имеет следующее очевидное обобщение.

Теорема 2.3. *Если числовая последовательность* (***a***), *определяющая сходящийся к числу A числовой ряд **A**, разбита произвольным образом на две подпоследовательности* (a^*) *и* ($\tilde{a}$),

$$(\boldsymbol{a})=(\boldsymbol{a}^*)\cup(\tilde{\boldsymbol{a}}),\ (\boldsymbol{a}^*)\cap(\tilde{\boldsymbol{a}})=\varnothing,$$

и каждая из этих подпоследовательностей определяет, соответственно, числовые ряды $\boldsymbol{A}^*$ *и* $\tilde{\boldsymbol{A}}$, *у которых последовательности* (S_n^*) и ($\tilde{S}_k$) *значений* S_n^* *и* $\tilde{S}_k$ *частичных сумм* Σ_n^* *и* $\tilde{\Sigma}_k$, *соответственно, сходятся к некоторым числам* (*или к некоторым бесконечно большим числам*) A^* *и* $\tilde{A}$, *соответственно, тогда* $A^*+\tilde{A}$=*A*.

Замечание 2.2. Теорема 2.3 обобщает очевидное свойство неизменности сходимости числового ряда, когда при $m\to\infty$ одна из сумм Σ_n^* и $\tilde{\Sigma}_k$, $n+k=m$, содержит конечное количество слагаемых.

В [7, IV. 1] дано «описание некоторых возможных типов сходимости ряда $\sum\limits_{i\in\omega}x_i$ элементов x_i произвольного линейного векторного пространства» в зависимости от выбора типа суммирования слагаемых ряда, в том числе отмечены: упорядоченная сходимость (A), перестановочная сходимость (B), неупорядоченная сходимость (C) и сходимость по подпоследовательностям (D). Перестановочная сходимость в [8, с. 4] называется безусловной сходимостью. Как следует из Теорем 2.1-2.3, справедливость которых сохраняется и для рядов $\sum_{i\in\omega} x_i$ элементов произвольного линейного векторного пространства, отмеченные выше типы сходимости эквивалентны.

Более того, если как-то иначе чем в этой статье определённая сходимость числового ряда, не является регулярной (вполне регулярной), то соответствующее определение или его интерпретация или и то, и другое является некорректным.

3. Примеры

Пример 3.1. Пусть $\boldsymbol{A}=\sum(-1)^{n+1}n^{-1}=A=\ln 2$. Из условно сходящегося ряда $\boldsymbol{A}$ в [9, с. 316-319] ряд $\boldsymbol{B}(p, q)$ «получен следующей процедурой»: после каждых p последовательных положительных слагаемых ряда $\boldsymbol{A}$ ставилось q последовательных отрицательных членов этого ряда. Будем шаг за шагом выполнять, следуя [2, с. 107], указанную выше процедуру и обозначать получающийся на n-м шаге ряд символом $\boldsymbol{B}_n(p, q) \triangleq \tilde{\boldsymbol{B}}_n$. Получаемая при этом последовательность ($\tilde{S}_n$) значений $\tilde{S}_n$ частичных сумм $\tilde{\Sigma}_n$ рядов $\tilde{\boldsymbol{B}}_n$ сходится к числу $B(p, q)=\ln(2\sqrt{p:q})$ и при $p\neq q$ $A\neq B(p, q)$.

Покажем, однако, что, если, например, $p>q$, $p+q=2k$, то при $n=2ks$ и $s=1, 2, 3,\dots$ $\tilde{r}_n \to (A-B(p, q))>0$, где $\tilde{r}_n$ – значение остатка $\tilde{\rho}_n$. Очевидно, что (см. (2.6))

$$\tilde{\boldsymbol{B}}_n=\sum_1^{ps}(2i-1)^{-1}-\sum_1^{qs}(2i)^{-1}-\sum_{qs+1}^{ps}(2i)^{-1}+\sum_{2ps+1}^{\infty}(-1)^{i+1}(i)^{-1}=\tilde{\Sigma}_n+\tilde{\sigma}(n)+\tilde{\rho}_{k(n)} \tag{3.1}$$

где $\tilde{\sigma}(n)=-\sum_{qs+1}^{ps}(2i)^{-1}$, $\tilde{\rho}_{k(n)} \triangleq \tilde{\rho}_{2ps}=\rho_{2ps}=\sum_{2ps+1}^{\infty}(-1)^{i+1}(i)^{-1}$ и $\tilde{r}_n=\tilde{\sigma}(n)+\rho_{2ps}$.

Используя следующие ниже два равенства из [9, с. 316-319]:

$$\sum_1^k (n)^{-1}=\ln k+C_e+\gamma_k \text{ и } \sum_1^m (2n)^{-1}=2^{-1}\cdot(\ln m+C_e+\gamma_m), \tag{3.2}$$

где C_e – постоянная Эйлера, а $\gamma_n \to 0$, мы получим последовательно следующие ниже оценки значений S_n и $\tilde{S}_n$ частичных сумм Σ_n и $\tilde{\Sigma}_n$, соответственно, и значений r_{2k} и $\tilde{r}_{2k}$ остатков ρ_n и $\tilde{\rho}_n$ рядов $\boldsymbol{A}$ и $\tilde{\boldsymbol{B}}_n$:

$$S_n=\ln 2+\gamma_n-\gamma_{n/2},\ \tilde{S}_n=\ln(2\sqrt{p:q})+\gamma_{2ps}-0{,}5\gamma_{ps}-0{,}5\gamma_{qs}, \tag{3.3}$$

$$r_n=-\gamma_n+\gamma_{n/2},\ \tilde{r}_n=-\ln\sqrt{p:q}-\gamma_{2ps}+0{,}5\gamma_{ps}+0{,}5\gamma_{qs}. \tag{3.4}$$

Оценка остатка $\tilde{r}_n$ в (3.3) получена из (3.1) с помощью равенств (3.2) по формуле $\tilde{r}_n=r_{2ps}-\sum_{qs+1}^{ps}(2i)^{-1}=r_{2ps}-(2)^{-1}\cdot(\sum_1^{ps}(i)^{-1}-\sum_1^{qs}(i)^{-1})$, здесь $p+q=2k$.

Учитывая (3.3) и (3.4), методом математической индукции можно доказать, что для всех n, $n\geq p+q$, $\tilde{S}_n=\ln(2\sqrt{p:q})-\beta_n$, $\tilde{r}_n=-\ln(\sqrt{p:q})+\beta_n$, где $\beta_n\to 0$, и $\lim \tilde{r}_{2kn}=-\ln(\sqrt{p:q})=A-B(p, q)$), (ср. [11, S. 138-139], [10, VIII. 195]).

Это результат имеет простое объяснение: в остатках $\tilde{\rho}_n$ рядов $\tilde{\boldsymbol{B}}_n$ при $p>q$ “накапливаются” отрицательные слагаемые.

С другой стороны, если рассмотреть без связи с рядом $\boldsymbol{A}$, например, такой ряд $B^* \triangleq 1+1/3-1/2+1/5+1/7-1/4+1/9+\cdots$, то каждая частичная сумма S_n^* этого ряда будет равна соответствующей частичной сумме $\tilde{S}_n$ ряда $\tilde{\boldsymbol{B}}_n$, если у последнего взять p=2 и

q=1. Поэтому $\lim S_n^* = \ln 2\sqrt{2}$, но, что легко показать, остаток r_n^* ряда B^* стремится к нулю. Это означает, что в отличие от каждого ряда $\widetilde{\boldsymbol{B}}_n$ ряд B^* не является перестановкой ряда $\boldsymbol{A}$. Аналитически отображение φ: $\boldsymbol{N}\to \boldsymbol{N}$, которое определило бы переход $\boldsymbol{A}\to B^*$, можно задать следующей формулой:

$$\varphi(n) = \begin{cases} (3n+1)/4, \ \textit{если} \ \ n = 4k-3, \\ (3n-1)/4, \ \textit{если} \ \ n = 4k-1, \ \ k\in\boldsymbol{N}. \\ 3n/2, \ \textit{если} \ \ n = 2k, \end{cases}$$

Очевидно, что данная функция φ не удовлетворяет необходимому предельному условию $\lim\limits_{n\in\mathrm{N}} (\varphi(n):n) = 1$ сюръективности отображения $\boldsymbol{N}\to \boldsymbol{N}$, другими словами, оно является неосуществимым на всём множестве $\boldsymbol{N}$. Это условие получено автором в работах [1-4].

Пример 3.2. Сложив у ряда $\boldsymbol{A}=\sum(-1)^{n+1}n^{-1}$ каждые два очередных слагаемых ряда мы получим следующий сходящийся знакоположительный числовой ряд $\boldsymbol{A}^{**}=\sum\frac{1}{n(n+1)}$ =A=ln2, здесь $n = 2k-1 \in \boldsymbol{N}$.

Пример 3.3. Выполним над членами ряда $\boldsymbol{A}=\sum(-1)^{n+1}n^{-1}$ из Примера 3.1 следующие операции: в каждой последовательной четвёрке слагаемых сложим первый с четвёртым и второй с третьим членом. Так полученный ряд

$$(A^*)=\sum\frac{3}{(2n-1)(2n+2)} - \frac{1}{2n(2n+1)} = \frac{3}{4}-\frac{1}{6}+\frac{3}{18}-\frac{1}{20}+\frac{3}{40}-\frac{1}{42}+\frac{3}{70}-\frac{1}{72}+\cdots$$

будет абсолютно сходящимся к тому же числу A=ln2 числовым рядом, и сходящимся «в два раза быстрее» исходного ряда $\boldsymbol{A}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

1. Sukhotin A.M. Alternative Analysis Principles.–Tomsk: TPU EPF, 2002.

2. Начало высшей математики. Томск: Изд-во ТПУ, 2004.

3. Sukhotin A.M. From G. Galilei’s paradox to alternative analysis // 4ecm, List of posters, Section 13.13 (Real analysis), Stockholm, 2004.

4. Сухотин, А. М. Приложение понятия *С*-точной пары в анализе //Современные проблемы науки и образования, 2007, 5.

5. Риман, Б. Сочинения. - М.; Л.: Гостехиздат, 1948.

6. Рудин, У. Основы математического анализа. – М.: Мир, 1966.

7. Дэй М.М. Нормированные линейные пространства. - М.: ИЛ, 1961.

8. Кашин, Б. С., Саакян, А. А. Ортогональные ряды. – М.: АФЦ, 1999.

9. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления..– М.: Наука, 1967.–Т. 2.

10 Харди, Г. Г. Курс чистой математики.– М.: Изд-во ИЛ, 1949.

11. Knopp K. Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen. – Berlin: Springer-Verlag, 1922.

12. Weisstein Eric W. CRC Concise Encyclopedia of Mathematics. 2nd ed. – London-New York: Chapman&Hall/CRC, 2002.

ON A CONVERGENCE OF NUMBER SERIES

Sukhotin A.M.
Tomsk polytechnic university

In this article a concept of natural variables *C*-pair is applied to prove the sufficiency of a necessary attribute of number series convergence: ($r_n \to 0$)$\Leftrightarrow$($a_n \to 0$). The same result has been proved by means of a convergence of unlimited by final numbers regular sequences to infinite large numbers.

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ