УДК 517.97

# О ТОЧЕЧНОЙ ПОЛНОТЕ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Василева М.В.

*Национальный Военный Университет „В. Левски”, Болгария*

Подробная информация об авторах размещена на сайте
«Учёные России» - http://www.famous-scientists.ru

**Теория оптимального управления систем с распределенными параметрами находит широкое практическое применение при управлении технологическими процессами, в основе которых лежат явления переноса вещества, импульса и энергии. В данной работе доказана точечная полнота систем уравнений в частных производных гиперболического типа, которые используются для описания объектов с распределенными параметрами.**

Теория управления объектами с распределенными параметрами стала разрабатываться уже после того, как были получены основные результаты в теории оптимизации для обыкновенных дифференциальных уравнений [1] и в отличие от последней, имеет гораздо менее завершенный характер. Это связано с трудностью исследования уравнений в частных производных, при наличии сложных граничных и начальных условий, а также с усложнением характера дополнительных ограничений, вызванных конкретными практическими постановками задач.

В настоящее время есть много работ, освещающих те или иные проблемы теории оптимального управления объектами, состояние которых описывается дифференциальными уравнениями в частных производных. Среди них: оптимальные задачи, вопросы существования и аппроксимации оптимальных решений, управляемость, наблюдаемость и идентификация объектов, необходимые и достаточные условия оптимальности процесса и др.

В данной работе исследуется вопрос о точечной полноте систем уравнений в частных производных гиперболического типа.

Понятие точечной полноты впервые было введено L. Weiss’ом, [3], который использовал его при исследовании управляемости систем с запаздыванием. До сих пор доказана точечная полнота линейных систем без запаздывания, при достаточно малом запаздывании [2] и др.

Пусть состояние объекта с распределенными параметрами описывается следующей системой уравнений в частных производных гиперболического типа:

$$\frac{\partial^2 x(t,s)}{\partial t \partial s} = A\frac{\partial x(t,s)}{\partial t} + A_1\frac{\partial x(t,s)}{\partial s} + A_2 x(t,s) \tag{1}$$

где x - n вектор, характеризующий состояние системы, $A, A_1, A_2 - n \times n$ постоянные матрицы, $t \in [0,t_1], s \in [0,s_1]$.

Для того, чтобы однозначно определить решение системы, зададим дополнительные условия типа Гурса на характеристиках $t = 0$ и $s = 0$ системы:

$$\begin{aligned} x(t,0) &= u(t) \\ x(0,s) &= v(t) \end{aligned} \tag{2}$$

и условие согласованности:

$$x(0,0)=u(0)=v(0)=x_0$$

**Определение**: Систему (1) – (2) назовем точечно полной, если для любого n - вектора p, $\|p\| \neq 0$ и любых $t,s$, $t\in[0,t_1]$, $s\in[0,s_1]$ выполняется:

$$p'x(t,s)\not\equiv 0$$

Попробуем найти условия, при которых система (1) – (2) будет точечно полной. Для этого сначала запишем решение системы в более компактном виде. Вводим неизвестную матричную функцию $F(t,\tau,s,\sigma)$ размерности $n\times n$, для которой предполагаем, что непрерывна по совокупности аргументов вместе с производными по $\tau$ и $\sigma$. Умножим систему (1) слева на $F(t,\tau,s,\sigma)$ и проинтегрируем в пределах от 0 до t и от 0 до s:

$$\int_0^t\int_0^s F(t,\tau,s,\sigma)\frac{\partial^2 x(\tau,\sigma)}{\partial\tau\partial\sigma}d\tau d\sigma=$$
$$\int_0^t\int_0^s F(t,\tau,s,\sigma)A\frac{\partial x(\tau,\sigma)}{\partial\tau}d\tau d\sigma+\int_0^t\int_0^s F(t,\tau,s,\sigma)A_1\frac{\partial x(\tau,\sigma)}{\partial\sigma}+\int_0^t\int_0^s F(t,\tau,s,\sigma)A_2x(\tau,\sigma)d\tau d\sigma$$

Применяя формулу интегрирования по частям и замены порядка интегрирования, преобразуем все интегралы в левой и правой части последнего равенства, после чего получаем:

$$F(t,t,s,s,)x(t,s,)=$$
$$\int_0^t\int_0^s\left[-\frac{\partial^2F(t,\tau,s,\sigma)}{\partial\tau\partial\sigma}-\frac{\partial F(t,\tau,s,\sigma)}{\partial\tau}A-\frac{\partial F(t,\tau,s,\sigma)}{\partial\sigma}A_1+F(t,\tau,s,\sigma)A_2\right]x(\tau,\sigma)\partial\tau\partial\sigma$$
$$+\int_0^t\left[\frac{\partial F(t,\tau,s,s)}{\partial\tau}+F(t,\tau,s,s)A_1\right]x(\tau,s)\partial\tau+\int_0^s\left[\frac{\partial F(t,t,s,\sigma)}{\partial\sigma}+F(t,t,s,\sigma)A\right]x(\tau,s)\partial\sigma$$
$$+\int_0^t F(t,\tau,s,0)\frac{\partial x(\tau,0)}{\partial\tau}d\tau+\int_0^s F(t,0,s,\sigma)\frac{\partial x(0,\sigma)}{\partial\sigma}d\sigma$$
$$-\int_0^t F(t,\tau,s,0)A_1x(\tau,0)d\tau-\int_0^s F(t,0,s,\sigma)A\ x(0,\sigma)d\sigma+F(t,0,s,0)x(0,0)$$

Поскольку функция $F(t,\tau,s,\sigma)$ неопределенная, потребуем от нее выполнения следующих условий:

$$\frac{\partial^2F(t,\tau,s,\sigma)}{\partial\tau\partial\sigma}=-\frac{\partial F(t,\tau,s,\sigma)}{\partial\tau}A-\frac{\partial F(t,\tau,s,\sigma)}{\partial\sigma}A_1+F(t,\tau,s,\sigma)A_2 \quad (3)$$

$$\frac{\partial F(t,\tau,s,s)}{\partial\tau}=-F(t,\tau,s,s)A_1 \quad \sigma=s \quad (4)$$

$$\frac{\partial F(t,t,s,\sigma)}{\partial \sigma} = -F(t,t,s,\sigma)A \quad \tau = t$$

$$F(t,t,s,s) = E_n, \ \tau = t, \ \sigma = s \tag{5}$$

где $E_n - n \times n$ единичная матрица.

Сопряженная с системой (1) система (3), вместе с дополнительными условиями (4) на прямых $\tau = t$ и $\sigma = s$ и условие (5) в точке $(t,s)$ полностью определяют функцию $F(t,\tau,s,\sigma)$, которую по аналогии с математической физикой можно назвать матричной функцией Римана.

Теперь, учитывая (3) - (5), можем записать решение системы (1) - (2) в следующем компактном виде:

$$x(t,s) = F(t,0,s,0)x_0 + \int_0^t F(t,\tau,s,0)\left[\frac{\partial u(\tau)}{\partial \tau} - A_1 u(\tau)\right]d\tau$$
$$+\int_0^s F(t,0,s,\sigma)\left[\frac{\partial v(\sigma)}{\partial \sigma} - Av(\sigma)\right]d\sigma \tag{6}$$

Допустим теперь, что система (1) не является точечно полной. Тогда, согласно определению точечной полноты, существует n – вектор $\eta$, $\|p\| \neq 0$, что для любых $t \in [0,t_1]$, $s \in [0,s_1]$ выполняется:

$$p'x(t,s) \equiv 0$$

Имея ввиду (6) это условие запишется в виде:

$$p'x(t,s) = p'F(t,0,s,0)x_0 + \int_0^t p'F(t,\tau,s,0)\left[\frac{\partial u(\tau)}{\partial \tau} - A_1 u(\tau)\right]d\tau$$
$$+\int_0^s p'F(t,0,s,\sigma)\left[\frac{\partial v(\sigma)}{\partial \sigma} - Av(\sigma)\right]d\sigma \equiv 0 \tag{7}$$

Поскольку функции $u(\tau)$ и $v(\sigma)$ произвольные, для выполнения (7) необходимо и достаточно выполнения следующих условий:

$$\begin{gathered} F'(t,0,s,0)p = 0 \\ F'(t,\tau,s,0)p = 0, \ \tau \in [0,t] \\ F'(t,0,s,\sigma)p = 0, \ \sigma \in [0,s] \end{gathered} \tag{8}$$

Обозначим теперь через $\psi(p,\tau,\sigma)$ вектор функцию:

$$\psi(p,\tau,\sigma) = F'(t,\tau,s,\sigma)p$$

Из формул (3) и (8) следует, что $\psi(p,\tau,\sigma)$ удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению:

$$\frac{\partial^2\psi(p,\tau,\sigma)}{\partial\tau\partial\sigma} = A_2'\psi(p,\tau,\sigma) - A'\frac{\partial\psi(p,\tau,\sigma)}{\partial\tau} - A_1'\frac{\partial\psi(p,\tau,\sigma)}{\partial\sigma} \tag{9}$$

с дополнительными условиями на прямых $\tau = 0$ и $\sigma = 0$:

$$\psi(p,\tau,0) = 0 \quad \tau \in [0,t]$$
$$\psi(p,0,\sigma) = 0 \quad \sigma \in [0,s]$$
$$\psi(p,0,0) = 0$$

Поскольку (9) - однородное относительно функции $\psi$, а начальные условия - нулевые, то следует, что:

$$\psi(p,\tau,\sigma) \equiv 0 \text{ для } \tau \in [0,t] \text{ и } \sigma \in [0,s] \tag{10}$$

Таким образом показали, что система (1) - (2) будет точечно неполной тогда и только тогда, когда существует n – вектор p, $\|p\| \neq 0$, что выполняется условие (10).

Допустим, что система (1) - (2) точечно неполная. Тогда существует вектор p, $\|p\| \neq 0$,что выполняется $\psi(p,\tau,\sigma) \equiv 0$ в $[0,t]\times[0,s]$. Вычислим $\psi$ в точке $\tau = t$, $\sigma = s$. Поскольку имеет место (10), то:

$$\psi(p,t,s) = 0, \ \|p\| \neq 0$$

С другой стороны, согласно (5) имеем:

$$\psi(p,t,s) = F'(t,t,s,s)p = E_n p = p$$

Выполнение последних двух равенств возможно лишь при условии, что $p = 0$. Это противоречит допущению, что $\|p\| \neq 0$. Таким образом доказали следующую теорему:

**Теорема:**

Система (1) - (2) точечно полная.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

1. Габасов Р., Ф.Кириллова. Качественная теория оптимальных процессов. Москва, „Наука”, 1971.

2. Зверкин А.М. О точечной полноте систем с запаздыванием. // Дифференциальные уравнения. 1973, том IX, №3

3. Weiss, L. On the Controllability of Delay-Differential Systems,. SIAM, J. Control,. vol. 5, No. 4, 1967, PP. 575-587.

## ABOUT POINT COMPLETENESS OF EQUATION SYSTEMS IN PARTIAL DERIVATIVES OF THE HYPERBOLIC TYPE

Vasileva M.V.
*National Military University "V.Levski", Bulgaria*

The theory of optimal system control with distributed parameters has wide practical application in controlling the technological processes which are based on substance, impulse and energy transfer events.

In the present paper the author proves the point completeness of the equation systems in partial derivatives of the hyperbolic type which are used to describe objects with distributed parameters.