Краткое сообщение

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПО ПЕРВОМУ ПРИБЛИЖЕНИЮ

Алдибеков Т.М.
Казахский национальный университет им. аль-Фараби
Алматы, Казахстан

В теореме Ляпунова об устойчивости по первому приближению рассматривается [1,2] нелинейная система $\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t,x)$ (1) где $A(t)$ непрерывная ограниченная матрица в промежутке $J = [t_0, +\infty)$ и векторная функция $f(t,x)$ непрерывна по t в J и непрерывна дифференцируема по x в области $\|x\| < h$. Рассматриваем систему (1), где $A(t)$ непрерывная неограниченная матрица, определенная в J. Необходимые сведения содержатся в [3].

Теорема. Пусть система (1) удовлетворяет следующим условиям: 1) система $\frac{dx}{dt} = A(t)x$ (2) обобщенно-правильная относительно некоторого $q(t) \in Q$; 2) все показатели Ляпунова относительно $q(t) \in Q$ системы (2) отрицательны, функция $f(t,x)$ непрерывна по t в J и непрерывна дифференцируема по x в области $\|x\| < h$ и удовлетворяет неравенству $\|f(t,x)\| \le \psi(t)\|x\|^m$, где $m > 1$ и $\psi(t)$ –функция на J, с нулевым показателем Ляпунова относительно $q(t) \in Q$. Тогда нулевое решение системы (1) экспоненциально устойчиво.

Доказательство. Пусть $\lambda_1(q)$ наибольший обобщенный показатель системы (2). Возьмем $\alpha > 0$, что $0 < \alpha < |\lambda_1(q)|$ и выполним преобразование: $x = y\exp(-\alpha[q(t) - q(t_0)])$. Тогда из (1) получим $\frac{dy}{dt} = B(t)y + g(t,y)$ (3), где $B(t) = A(t) + \alpha q'(t)E$, $g(t,y) = f\left(t, ye^{-\alpha[q(t)-q(t_0)]}\right)$. Здесь $g(t,y)$ непрерывна по t в J и непрерывна дифференцируема по y в области $\|y\| < he^{\alpha[q(t)-q(t_0)]}$. Система $\frac{dy}{dt} = B(t)y$ (4) обобщенно-правильная. Уравнение (3) эквивалентно интегральному уравнению $y(t) = H(t)y(t_0) + \int_{t_0}^{t} K(t,\tau)g(\tau, y(\tau))d\tau$ (5), где $K(t,\tau) = H(t)H^{-1}(\tau)$ - матрица Коши системы (4). В силу выбора α все обобщенные показатели системы (4) отрицательные, поэтому существует $c_1 > 1$ и $\|H(t)\| < c_1$ в J. В J для матрицы Коши имеет место оценка $\|K(t,\tau)\| < c_2 e^{\varepsilon[q(\tau)-q(t_0)]}$, $t_0 \le \tau \le t < +\infty$, $c_2 > 0$. Имеем $\|g(t,y)\| \le c_3 e^{[\varepsilon-(m-1)\alpha][q(t)-q(t_0)]}\|y\|^m$ где $c_3 > 0$. Оценивая решений (5), по схеме как в [2] получим, что нулевое решение системы (1) экспоненциально устойчиво по Ляпунову. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

1. Ляпунов А.М. //Собрание сочинений. В 6-ти т. 1956.Т.2. М.-Л.473 с.2.
2. Демидович Б.П.//Лекции по математической теории устойчивости.1967. 472 с.
3. Алдибеков Т.М.//Дифференциальные уравнения. 2006. Т.42. №6. С.859.