МАТЕРИАЛЫ VI МЕЖДУНАРОДНОЙ НАУЧНОЙ КОНФЕРЕНЦИИ «ПЕРСПЕКТИВЫ РАЗВИТИЯ ВУЗОВСКОЙ НАУКИ (Г. СОЧИ (ДАГОМЫС), 21-24 СЕНТЯБРЯ 2009 Г.)

Физико-математические науки

ОПРЕДЕЛЕНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПЛОТНОСТИ В УПРУГОМ СЛОЕ ПО РЕЗОНАНСНЫМ ЧАСТОТАМ ЕГО АНТИПЛОСКИХ КОЛЕБАНИЙ

Волкова Е.А.
Ростовский государственный строительный университет,
Ростов-на-Дону, Россия

Введение. В работе исследуются вопросы математического моделирования задачи об определении места расположения дефекта и его геометрические и физические характеристики в фундаменте зданий и сооружений. Математически, такая задача моделируется обратной спектральной задачей Штурма-Ливилля, в которой по известному спектру колебаний определяется переменный коэффициент дифференциального оператора. В данном случае, в качестве частот колебаний используются резонансные частоты свободных колебаний упругого слоя, а переменный коэффициент дифференциального оператора отражает переменную плотность упругого слоя по толщине. В работе исследуется влияние точности входной информации на точность определяемых величин с помощью анализа логарифмической производной от параметров неизвестной функции. Показано, что в общем случае решение рассматриваемой обратной задачи неединственно.

1. Постановка задачи. Рассмотрим упругий слой толщины ***H=const***, закрепленный на обеих границах ***z=0*** и ***z=H*** и простирающийся до бесконечности по горизонтальным направлениям, начало координат берется на нижнем основании слоя, ось **z** направлена вертикально вверх, оси ***x***, ***y*** - горизонтально.

В общем случае краевая задача, состоит из основных уравнений теории упругости, записанных в перемещениях и граничных условий [1]:

$$\nabla^2\vec{u} + \frac{1}{1-2\upsilon}grad(\theta) + \frac{\vec{F}}{G} = \frac{\rho(z)}{G}\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial t^2}, \quad u_y\big|_{z=0} = 0,\ u_y\big|_{z=H} = 0; \tag{1}$$

где $\theta = div\,\vec{u}$; (x, y, z) - декартова система координат, $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$ - вектор перемещений, $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$ - объемная сила, $G = const$ - модуль сдвига, υ - коэффициент Пуассона, $\rho(z)$ – плотность материала.

Предположим, что выполняются следующие условия:

$$\vec{F} \equiv 0,\ u_x \equiv 0,\ u_z \equiv 0,\ \frac{\partial\vec{u}}{\partial y} \equiv 0, \tag{2}$$

тогда получим, что первое и третье уравнения системы (1) удовлетворяются тождественно, а второе уравнение и соответствующее ему граничное условие примут следующий вид:

$$\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} = \frac{\rho(z)}{G}\frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2},\ u_y\big|_{z=0} = 0,\ u_y\big|_{z=H} = 0 \tag{3}$$

Ищем решение задачи о свободных антиплоских колебаниях в виде бегущих волн:

$$u_y = W(z)e^{i\omega t - ikz},$$

где ω - частота колебаний, k - волновое число, и, обозначая $\rho(z)/G$ через $\mu(z)$, получим краевую задачу:

$$W''(z) + (\mu(z)\omega^2 - k^2)W = 0,\ W(0) = 0,\ W(H) = 0. \tag{4}$$

2. Решение спектральной задачи о свободных антиплоских колебаниях упругого слоя будем искать с помощью разложения в степенной ряд искомой функции $W(z)$ (учитывая, что $W(0) = 0$)

$$W(z) = W_1 z + W_2 z^2 + \ldots + W_5 z^5,$$

при этом, функцию $\mu(z)$ аппроксимируем следующим выражением:

$$\mu(z) = \mu_0 + \mu_1 z\ .$$

Подставляя предполагаемую форму решения в уравнение задачи (4), получим рекуррентную систему линейных уравнений относительно коэффициентов $W_i, i = 1,..5$. Используя граничное условие при ***z=H***, получаем дисперсионное уравнение, связывающее частоты колебаний ω и волновые числа k с коэффициентами μ_i:

$$1 - \frac{\mu_0\omega^2 - k^2}{6} H^2 - \frac{\mu_1\omega^2}{12} H^3 + \frac{\left(\mu_0\omega^2 - k^2\right)^2}{120} H^4 = 0. \tag{5}$$

Решим уравнение (5) относительно выражения $\mu_0\omega^2 - k^2$:

$$\left(\mu_0\omega^2 - k^2\right)_{1,2} = \frac{\frac{H^2}{6} \pm \sqrt{\frac{H^4}{36} - \frac{H^4}{30}\left(1 - \frac{\mu_1\omega^2}{12} H^3\right)}}{\frac{H^4}{60}} \equiv A(\omega, \mu_1). \tag{6}$$

$$k_{1,2}^2 = \mu_0\omega^2 - A(\omega, \mu_1). \tag{7}$$

Выражение (7) представляет собой зависимость волнового числа от частоты колебаний, т.е., аналитическое представление дисперсионной кривой. Поскольку нас интересуют только вещественные положительные решения, то необходимо наложить следующие ограничения на величины, входящие в выражение (10):

1. для обеспечения вещественности дисперсионной кривой

$$\frac{H^4}{36} - \frac{H^4}{30}\left(1 - \frac{\mu_1\omega^2}{12} H^3\right) > 0, \tag{8}$$

2. для положительности решения:

$$\omega^2 \mu_0 - A(\omega, \mu_1) > 0. \tag{9}$$

Имея аналитическое представление (7) можем построить график дисперсионной кривой.

2. Решим теперь обратную задачу по определению коэффициентов μ_0, μ_1. Выпишем выражение (7) для двух различных значений пар чисел (ω_1, k_1) и (ω_2, k_2):

$$\begin{cases} k_1^2 = \mu_0\omega_1^2 - A(\omega_1, \mu_1), \\ k_2^2 = \mu_0\omega_2^2 - A(\omega_2, \mu_1). \end{cases} \tag{10}$$

Решая систему (10), получим значение коэффициента μ_0:

$$\mu_0 = \frac{10H^2\omega_1\omega_2\left(k_2^2 - k_1^2\right) \pm 60\sqrt{\psi(\omega_1, \omega_2, k_1, k_2)}}{H^2\omega_1^2\omega_2^2\left(\omega_2^2 - \omega_1^2\right)}$$ и, следовательно коэффициента μ_1 функции $\mu(z)$

(выражение для функции $\psi(\omega_1, \omega_2, k_1, k_2)$ опущено ввиду его громоздскости)

Для оценки влияния точности входной информации на точность выходной, была найдена логарифмическая производная от величины μ_0:

$$\frac{d\mu_0}{\mu_0} = \frac{1}{F}\left\{\frac{\partial F}{\partial \omega_1} d\omega_1 + \frac{\partial F}{\partial \omega_2} d\omega_2 + \frac{\partial F}{\partial k_1} dk_1 + \frac{\partial F}{\partial k_2} dk_2\right\},$$

$$\text{здесь } F = \frac{10H^2\omega_1\omega_2\left(k_2^2 - k_1^2\right) \pm 60\sqrt{\psi(\omega_1, \omega_2, k_1, k_2)}}{H^2\omega_1^2\omega_2^2\left(\omega_2^2 - \omega_1^2\right)}. \tag{11}$$

Формула (11) показывает, каким образом относительная точность определения μ_0 зависит от точности $d\omega$ и dk задаваемых величин ω и k. Эта же формула показывает, к каким параметрам задачи чувствительна точность определяемой величины. Большая погрешность получается в случае близких значений ω_1, ω_2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

1. В. Новацкий "Теория упругости", М.: Изд-во "Мир", 1975г., - 872с.