СТЕКАНИЕ НЕОДНОРОДНОЙ ЖИДКОСТИ ПО НАКЛОННОЙ ПЛОСКОСТИ

Есин Н.В., Потетюнко Э.Н., Резникова С.В., Хартиев С.М.
Южный Федеральный Университет, Ростов-на-Дону, Россия.

1. Введение. Работа посвящена определению закономерности стекания стратифицированной жидкости по наклонной плоскости; определению скоростей стока, расхода жидкости и силе трения на плоскость, по которой стекает плоскость.

Такая задача может моделировать речной сток в солёное море при наличии шельфового трения от берега за счёт ветра.

2. Постановка задачи.

Пусть плотности для нижней ρ_1 и верхней ρ_2 задаются в виде:

$\rho_1 = \rho_{1,0} e^{-\beta_1 z}$, $\rho_2 = \rho_{2,0} e^{-\beta_2 z}$. Где $\rho_{1,0} e^{-\beta_1 h_1}$, $\rho_{2,0} e^{-\beta_2 h_2}$ - значения плотностей жидкостей на их верхних границах.

Движение считаем стационарным и непрерывным вдоль наклонённой плоскости, по которой направим ось *Ox,* ось *Oz* направим перпендикулярно от горизонтальной плоскости вверх . *Oy* направим горизонтально, перпендикулярно к плоскости *Oxz*. Начало координат взято на неподвижной плоскости.

$X = g\sin\alpha,\ Y = 0,\ Z = -g\cos\alpha.$

Считаем $v_y \equiv 0,\ v_z \equiv 0,\ v_{x1,2} = v_{x1,2}(z)$. Тогда уравнения несжимаемости и сплошности выполняются автоматически, а уравнения движения жидкостей записываются в виде [1]:

$$\begin{cases} \rho_{j,0} e^{-\beta_j z} g\sin\alpha + \mu_j \left(\dfrac{\partial^2 v_j}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 v_j}{\partial z^2} \right) = 0; & (1) \\ \dfrac{\partial p_j}{\partial y} = 0, \dfrac{\partial p_j}{\partial z} + \rho_{j,0} e^{-\beta_j z} g\cos\alpha = 0,\ \text{(j=1,2)} & (2) \end{cases}$$

Граничными условиями [1] являются: на верхней границе при $z = h_2$ условие отсутствия касательных напряжений $\dfrac{\partial v_2}{\partial z} = 0$ и равенство нормальных напряжений внешнему давлению $p_2 = p_0$, которое считаем постоянным. На границе раздела потоков должны равняться нормальные и касательные напряжения: $p_{1zz} = p_{2zz}$, $\mu_1 \dfrac{\partial v_1}{\partial z} = \mu_2 \dfrac{\partial v_2}{\partial z}$ при $z = h_1$. На нижней границе условие прилипания: $v_1 = 0$ при $z = 0$.

Интегрируя уравнения (2) и пользуясь граничными условиями, находим:

$$p_1 = p_0 + \frac{1}{\beta_2} g\cos\alpha\rho_{2,0}\left(e^{-\beta_2 h_1} - e^{-\beta_2 h_2}\right) + \frac{1}{\beta_1} g\cos\alpha\rho_{1,0}\left(e^{-\beta_1 z} - e^{-\beta_1 h_1}\right) .$$

$$p_2 = p_0 + \frac{1}{\beta_2} g\cos\alpha\rho_{2,0}\left(e^{-\beta_2 z} - e^{-\beta_2 h_2}\right).$$

Дважды интегрируя уравнения (1) и пользуясь граничными условиями, находим:

$$v_1 = \frac{\rho_{2,0} g\sin\alpha}{\mu_1\beta_2}\left(e^{-\beta_2 h_1} - e^{-\beta_2 h_2}\right) z + \frac{\rho_{1,0} g\sin\alpha}{\mu_1\beta_1}\left(\frac{1}{\beta_1}\left(-e^{-\beta_1 z} + 1\right) - e^{-\beta_1 h_1} z\right);$$

$$v_2 = \frac{\rho_{2,0} g\sin\alpha}{\mu_2\beta_2}\left(\frac{1}{\beta_2}\left(-e^{-\beta_2 z} + e^{-\beta_2 h_1}\right) + \left(e^{-\beta_2 h_2} h_1 - e^{-\beta_2 h_2} z\right)\right) +$$

$$+ \frac{\rho_{2,0} g\sin\alpha}{\mu_1\beta_2}\left(e^{-\beta_2 h_1} - e^{-\beta_2 h_2}\right) h_1 + \frac{\rho_{1,0} g\sin\alpha}{\mu_1\beta_1}\left(\frac{1}{\beta_1}\left(-e^{-\beta_2 h_1} + 1\right) - e^{-\beta_1 h_1} h_1\right).$$

Если мы устремим $\beta_j \to 0$ получим результат для двухслойной жидкости:

$$v_1 = \frac{\rho_1 g \sin\alpha}{\mu_1}\left(h_1 - \frac{z}{2}\right)z + \frac{\rho_2 g \sin\alpha}{\mu_1}\left(h_2 - h_1\right)z \ ;$$

$$v_2 = \rho_1\left(1 - \frac{\rho_2}{\rho_1}\right)\frac{g\sin\alpha}{\mu_1}h_1^2 + \frac{\rho_2 h_1 h_2 g\sin\alpha}{\mu_1}\left(1 - \frac{\mu_1}{\mu_2}\right) + \frac{h_1^2 g\sin\alpha}{2}\left(\frac{\rho_2}{\mu_2} - \frac{\rho_1}{\mu_1}\right) +$$

$$+\frac{\rho_2 g\sin\alpha}{\mu_2}\left(h_2 z - \frac{z^2}{2}\right);$$

Вычислим расход жидкости:

$$Q = Q_1 + Q_2 = \int_0^{h_1} v_1(z)dz + \int_{h_1}^{h_2} v_2(z)dz = 2\frac{\rho_{2,0} g\sin\alpha}{\mu_1\beta_2}\left(h_2 - h_1\right)\left(e^{-\beta_2 h_1} - e^{-\beta_2 h_2}\right) +$$

$$+\frac{\rho_{1,0} g\sin\alpha}{\mu_1\beta_1}\left[\left(h_2 - h_1\right)\left(\frac{1}{\beta_2} - e^{-\beta_2 h_1}\right) + \left(\frac{1}{\beta_1}\left(h_1 + \frac{1}{\beta_1}(e^{-\beta_1 h_1} - 1)\right) - \frac{1}{\beta_1}e^{-\beta_1 h_1}\frac{h_1^2}{2}\right)\right] +$$

$$+\frac{\rho_{2,0} g\sin\alpha}{\mu_2\beta_2}\left(h_2 - h_1\right)\left(\frac{e^{-\beta_2 h_1}}{\beta_2} + h_1 e^{-\beta_2 h_2} - \frac{h_2^2 - h_1^2}{2}e^{-\beta_2 h_2} + \frac{e^{-\beta_2 h_2} - e^{-\beta_2 h_1}}{\beta_2\left(h_2 - h_1\right)}\right),$$

$$\left\{\beta_j \to 0,\ Q \to\ g\sin\alpha\left(-\frac{2\rho_2}{3\mu_2} - \frac{\rho_1}{6\mu_1} - \frac{2\rho_2}{3\mu_1}\right)h_1^3 + g\sin\alpha\left(\frac{\rho_2}{\mu_1} - \frac{\rho_2}{\mu_2}\right)h_1 h_2^2 +\right.$$

$$\left. g\sin\alpha\frac{\rho_2}{3\mu_2}h_2^3 + g\sin\alpha\left(-\frac{3\rho_2}{2\mu_1} + \frac{\rho_1}{2\mu_1} + \frac{\rho_2}{\mu_2}\right)h_1^2 h_2\right\};$$

Вычислим трение:

$$\tau_1 = \mu_1\frac{\partial v_1}{\partial z}\bigg|_{z=0} = \frac{\rho_{1,0} g\sin\alpha}{\beta_1}(1 - e^{-\beta_1 h_1}) + \frac{\rho_{2,0} g\sin\alpha}{\beta_2}(e^{-\beta_1 h_1} - e^{-\beta_1 h_2});$$

$$\left\{\beta_j \to 0,\ \tau_1 \to\ \rho_2 g\sin\alpha\left(h_2 - h_1\right) + \rho_1 g\sin\alpha h_1\right\};$$

$$\tau_1 = \mu_1\frac{\partial v_1}{\partial z}\bigg|_{z=h_1} = \tau_2 = \mu_2\frac{\partial v_2}{\partial z}\bigg|_{z=h_1} = \frac{\rho_{2,0} g\sin\alpha}{\beta_2}(e^{-\beta_1 h_1} - e^{-\beta_1 h_2});$$

$$\left\{\beta_j \to 0,\ \tau_j \to \rho_2 g\sin\alpha\left(h_2 - h_1\right)\right\};$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

1. Н. Е. Кочин, И.А. Кибель, Н.В. Розе. Теоретическая гидромеханика, ч. II. М., Физматгиз, 1963 г., 728 с.