МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ПЕРЕНОСА ЗАГРЯЗНЕНИЙ ПО ПОВЕРХНОСТИ ВОДЫ

Загриценко Н.Н.
Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону.

Постановка задачи.

Пусть в начальный момент времени известны очертания загрязнения, выплеснувшегося на поверхность воды (допустим, при аварии танкера)

$$z = h_*(x, y) \qquad x, y \in S \tag{1}$$

Здесь S – известная в начальный момент времени область на плоскости z=0, залитая загрязнением, $h_*(x,y)$ - известное в начальный момент времени возвышение поверхности выплеснувшегося загрязнения над невозмущенным уровнем z=0.

Заданы барические возмущения атмосферы $P_a(x,y,t)$, действующие на водную поверхность, скорость ветра $\overline{u}_B$, скорость которого для простоты примем постоянным, скорость постоянного течения $\overline{u}_T$ в данном месте (допустим, течения Гольфстрима), начальное распределение скоростей движения атмосферы и воды и начальное распределение синоптического вихря как в атмосфере, так и в толще воды. Требуется определить очертания пятна загрязнения в любой момент времени, а также направление и скорость перемещения центра пятна.

Решение задачи будем строить на основе уравнений гидродинамики, описывающих движение атмосферы и воды [1]:

$$\frac{\partial \overline{v}_j}{\partial t} + (\overline{v}_j \nabla)\overline{v}_j = -\frac{1}{\rho_j}\frac{\partial p_j}{\partial t} - g\overline{k} + \nu_j \Delta \overline{v}_j, \quad div\ \overline{v}_j = 0, \qquad j=1, 2, 3.$$

Индекс 1 относится к атмосфере, индекс 2 – к жидкости, индекс 3 – к загрязнению. Здесь p_j - гидродинамическое давление, ρ_j - постоянные плотности, ν_j - постоянные кинематические вязкости атмосферы, воды и загрязнения. Из всех массовых сил действует только сила тяжести, g – ускорение свободного падения. Приливообразующими силами пренебрегаем.

Начальные условия: $\overline{v}_j\big|_{t=0} = \overline{a}_j(x, y, z)$, $\quad rot\ \overline{v}_j\big|_{t=0} = \overline{\omega}_j(x, y, z)$, $\qquad$ j=1, 2, 3.

По вертикали и горизонтали считаем атмосферу и жидкость простирающимися до бесконечности и все возмущающие факторы, кроме постоянной скорости ветра и постоянной скорости течения, затухающими на бесконечности. На границе раздела $z = \zeta(x, y, t)$ атмосферы и воды, а также атмосферы и пятна $z = h_*$ заданы барометрические давления $P_a(x, y, t)$ как функции координат x, y и времени t, заданы очертания загрязнения в форме (1), а также выполняются условия контакта двух вязких несмешивающихся жидкостей:

$$v_{1\tau_{1,2}} = v_{2\tau_{1,2}},\ v_{1n} = v_{2n} = \frac{d\zeta}{dt},\ \overline{p}_{1n} = \overline{p}_{2n},\ \overline{p}_n = \{p_{nn}, p_{n\tau_1}, p_{n\tau_2}\},\ x, y \overline{\in} S.$$

Здесь τ_1, τ_2 - два взаимно перпендикулярных орта в касательной плоскости к деформируемой поверхности раздела жидкости с атмосферой и пятном $z = \zeta(x, y, t)$, $\overline{n}$ - нормаль к этой поверхности.

Кинематическое условие на поверхности разрыва состоит в том, что скорость перемещения поверхности разрыва совпадает со скоростью частиц жидкости, образующих эту поверхность $\Phi(x, y, z, t) = -z + \zeta(x, y, t) = 0$ [1]:

$$v_n = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)^2}} = -\frac{\partial \zeta}{\partial t} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right)^2}}$$

$$v_n = \overline{v} \cdot \overline{n} = (v_x i + v_y j + v_z k) \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial x} i + \frac{\partial \Phi}{\partial y} j + \frac{\partial \Phi}{\partial z} k}{\sqrt{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)^2}}.$$

Отсюда имеем: $\mathrm{v}_z = \dfrac{\partial\zeta}{\partial t} + \mathrm{v}_x \dfrac{\partial\zeta}{\partial x} + \mathrm{v}_y \dfrac{\partial\zeta}{\partial y}$ при $z = \zeta(x,y,t)$.

Аналогично для линий $y=f_1(x,t)$, $y=f_2(x,t)$, очерчивающих область S на плоскости **z**=0 имеем:

$$\mathrm{v}_{2y} = \frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\partial f_1}{\partial x}\mathrm{v}_{2x},\ y = f_1(x,t);\quad \mathrm{v}_{2y} = \frac{\partial f_2}{\partial t} + \frac{\partial f_2}{\partial x}\mathrm{v}_{2x},\ y = f_2(x,t). \qquad (2)$$

Основные океанологические допущения.

1. Будем считать слой загрязнений тонким (высоту пятна считаем много меньше его максимального диаметра). Тогда, в силу допущений тонкого слоя, уравнение для изменения давления в пятне примет вид: $\dfrac{\partial p_3}{\partial z} = -\rho_3 g$.

Это уравнение интегрируется: $p_3 = -\rho_3 g z + C(x,y,t)$. На поверхности контакта пятна с атмосферой, то есть, при $z = \zeta_*(x,y,t)$, давление p должно равняться атмосферному давлению. Поэтому $p_3 = p_1 + \rho_3 g(h_* - z)$, а при z=0 получаем: $p_3 = p_1 + \rho_3 g h_*(x,y,t)$.

Таким образом, на жидкость на поверхности **z**=0 действует внешнее давление $p_*(x,y,t)$.

$$p_*(x,y,t) = \begin{cases} p_a(x,y,t) & x \overline{\in} S \\ p_a(x,y,t) + \rho_1 g h_*(x,y,t) & x \in S \end{cases}. \qquad (3)$$

2. Ось Ox направим по течению жидкости в данном месте. Скорость жидкости и давление представим в виде суммы [1]:

$$\mathrm{v}_{2x} = u_{2x} + \mathrm{v}'_{2x},\ \mathrm{v}_{2y} = \mathrm{v}'_{2y},\ \mathrm{v}_{2z} = \mathrm{v}'_{2z}, \qquad u_2 = u_T + 0{,}037 u_B \cos\alpha,$$

$$p_2 = -\rho_2 g z.$$

Здесь u_T - скорость течения жидкости в данном месте, α - угол между направлением ветра и направлением течения. При этом учтено, что за счет ветра жидкость приобретает дрейфовое течение со скоростью $u_{дрейфа}=0{,}037u_{ветра}$ (как известно из экспериментальных данных).

Скорость движения атмосферы и давления в ней также представим в виде суммы:

$$\mathrm{v}_{1x} = u_1 + \mathrm{v}'_{1x},\ \mathrm{v}_{1y} = \mathrm{v}_1 + \mathrm{v}'_{1y},\ \mathrm{v}_{1z} = \mathrm{v}'_{1z};\quad \mathrm{v}_1 = u_B \sin\alpha, \qquad p_1 = -\rho_1 g z + \rho_1 u_B^2/2 + p'_1.$$

3. Будем считать добавки $\overline{\mathrm{v}}'_1$, p'_1 и $\overline{\mathrm{v}}'_2$, p'_2 к скоростям и давлениям атмосферы и жидкости на бесконечности малыми и будем пренебрегать нелинейными членами. Тогда получим следующую краевую задачу (штрихи над функциями опускаем).

$$\frac{\partial\overline{\mathrm{v}}_j}{\partial t} + \overline{u}_j \nabla\overline{\mathrm{v}}_j = -\frac{1}{\rho_j}\nabla P_j + \nu_j \nabla\overline{\mathrm{v}}_j; \qquad div\overline{\mathrm{v}}_j = 0 \qquad j = 1,2 \qquad (4)$$

$$\textbf{z=0:}\ -P_1 + \rho_1 g\zeta_1 + 2\mu_1\frac{\partial v_{1z}}{\partial z} = -P_2 + \rho_2 g\zeta_2 + 2\mu_2\frac{\partial v_{2z}}{\partial z} + p_*(x,y,t). \qquad (5)$$

$$\mu_1\left(\frac{\partial \mathrm{v}_{1x}}{\partial z} + \frac{\partial \mathrm{v}_{1z}}{\partial x}\right) = \mu_2\left(\frac{\partial \mathrm{v}_{2x}}{\partial z} + \frac{\partial \mathrm{v}_{2z}}{\partial x}\right); \qquad \mu_1\left(\frac{\partial \mathrm{v}_{1y}}{\partial z} + \frac{\partial \mathrm{v}_{1z}}{\partial y}\right) = \mu_2\left(\frac{\partial \mathrm{v}_{2y}}{\partial z} + \frac{\partial \mathrm{v}_{2z}}{\partial y}\right)$$

$$\mathrm{v}_{1x} = \mathrm{v}_{2x},\ \mathrm{v}_{1y} = \mathrm{v}_{2y}; \qquad \frac{\partial\zeta}{\partial t} = \mathrm{v}_{1z} + u_1\frac{\partial \mathrm{v}_{1x}}{\partial x} + \mathrm{v}_1\frac{\partial \mathrm{v}_{1y}}{\partial y} = \mathrm{v}_{2z} + u_2\frac{\partial \mathrm{v}_{1x}}{\partial x}. \qquad (6)$$

На бесконечности по вертикали и горизонтали все искомые функции убывают. В начальный момент времени заданы распределения скоростей и вихрей.

Алгоритм решения задачи.

Учитывая, что пятно расплывается медленно, будем решать задачу в квазистатическом приближении. А именно, считаем, что на некотором интервале времени $0 < t < t_*$ площадь пятна S(x,y) стационарна, то есть, границы пятна $y = f_{1,2}(x)$ на плоскости z=0 не зависят от времени, а происходит просто

оседание пятна по высоте. Для определения динамики оседания пятна решаем краевую задачу (4)-(6) и в результате решения находим вид возвышения поверхности жидкости:

$$\zeta(x,y,t)=\iint\limits_S\int\limits_0^t p_*(x-u,y-\mathrm{v},t-\tau)L(u,\mathrm{v},\tau)dud\mathrm{v}d\tau \qquad (7)$$

Здесь L – функция Грина задачи (2.7)-(2.14), которая строится при помощи интегральных преобразований Фурье по горизонтальным координатам x и y и преобразования Лапласа по времени t.

Полагая в (7) x и $y\in S$ и учитывая (3) выводим интегральное уравнение для $h_*(x,y,t)$. Решая его, находим изменение высоты пятна $h_*(x,y,t)$ во времени над фиксированной областью S(x). Зная $h_*(x,y,t)$, находим $\mathrm{v}_{1,2x}$, $\mathrm{v}_{1,2y}$, $\mathrm{v}_{1,2z}$, $\mathrm{P}_{1,2}$, $\zeta(x,y,t)$.

Теперь воспользуемся кинематическим условием (2). Получаем дифференциальное уравнение для границы пятна f_1 и f_2.

$$\mathrm{v}_{2y}\big|_S=\frac{\partial f_1}{\partial t}+\frac{\partial f_1}{\partial x}\left(u_1+\mathrm{v}_{2x}\big|_S\right),\ y=f_1(x,t);\ \mathrm{v}_{2y}\big|_S=\frac{\partial f_2}{\partial t}+\frac{\partial f_2}{\partial x}\left(u_1+\mathrm{v}_{2x}\big|_S\right),\ y=f_2(x,t). \qquad (8)$$

Здесь $\mathrm{v}_{2x}\big|_S$, $\mathrm{v}_{2y}\big|_S$ - вычисленные скорости жидкости на заданной в начальный момент границе пятна, которое, напомним, на интервале $0\le t\le t_*$ считается фиксированным. Уравнения границ этого пятна $y=f_1(x,0)$, $y=f_2(x,0)$ в начальный момент времени являются начальными условиями для (8).

Решая (8), находим $f_{1,2}(x,t)$. Полагая $t=t_*$, определяем теперь S_* - область пятна в момент времени t_*. Далее рассматриваем интервал времени $t_*\le t\le t_{**}$ и заново решаем задачу (4)-(6).

Траектория движения центра пятна: $$\overline{r}_{ic}=\frac{\iint\limits_S \overline{r}h_{*i}(x,y,t)dxdy}{\iint\limits_S h_{*i}(x,y,t)dxdy},\ h_{*i}=h_*(x,y,t) \text{ при } t_i\le t\le t_{i+1} \qquad (9)$$

Управление движением пятна и его формой.

В формулах (9) считаем заданными $x_{ic}(t)$, $y_{ic}(t)$, то есть, считаем заданной траекторию движения центра пятна, а неизвестной – входящую в h_* согласно (7) и (3) функцию $\mathrm{P}_a(x,y,t)$. Тогда уравнения (9) трактуем как интегральное уравнение для $\mathrm{P}_a(x,y,t)$, решая которое, находим, какое искусственное возмущение надо создать (либо направленные взрывы в атмосфере, либо вибрация платформы заданных конфигураций в задаваемых местах с задаваемыми частотами или законами по времени), чтобы траектория движения центра пятна была заданной.

Аналогично, дифференциальные уравнения (2), при заданных очертаниях $f_1(x,t)$, $f_2(x,t)$ границы пятна, можно трактовать как интегральные уравнения относительно $\mathrm{P}_a(x,y,t)$., поскольку v_{2x}, v_{2y} выражаются в виде интегралов от функций $\mathrm{P}_a(x,y,t)$. Решая эти уравнения относительно $\mathrm{P}_a(x,y,t)$, находим, какие искусственные возмущения надо создать, чтобы пятно приняло заданную форму.

Таким образом, построена математическая модель определения границ пятна и его динамика по времени, а также даны рекомендации по управлению движением пятна аварийного загрязнения и его формой.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

1. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. М., государственное издательство физико-математической литературы, ч.2, 1963, 728 с.

МЕХАНИЗМ ДЕЙСТВИЯ ФИЗИЧЕСКИХ ФАКТОРОВ И ХИМИЧЕСКИХ СОЕДИНЕНИЙ НА ЭЛЕКТРОЛИТАХ, МЕМБРАННЫХ СИСТЕМАХ И НА ЦЕЛОМ ОРГАНИЗМЕ

Кожокару А.Ф.
Институт биофизики клетки РАН, Пущино, Московская область, Россия

Проведенные нами научно-исследовательские работы в лаборатории сравнительной радиочувствительности Института биофизики АН СССР (с 1969-1990 г.г.), а затем в лаборатории радиационной биофизики Института биофизики клетки РАН (1990-2009 г.г.) позволили нам получить ряд новых экспериментальных данных и составить определенные представления о различных пробле-