УДК 004.942

АНАЛИЗ ДИНАМИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ ЦИКЛИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Сидристый Б.А.

Камышинский технологический институт(филиал) Государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования, «Волгоградский государственный технический университет»

Представлена методика разложения сложных циклических процессов на ряд простых по структуре циклических составляющих, отличающихся друг от друга длительностью своего цикла. Методика может быть использована при идентификации и прогнозировании процессов, протекающих циклично.

Ключевые слова: циклический процесс, прогнозирование циклических процессов, идентификация циклических процессов, структура циклического процесса.

Циклические процессы широко распространены в природе (циклические изменения температуры воздуха, влажности и других метеорологических параметров, оптовые и розничные цены товаров, урожайность различных сельскохозяйственных культур, показатели рождаемости и смертности населения в той или иной стране и многие другие). Течение любого такого процесса определяется совокупностью факторов, циклически изменяющихся во времени и имеющих разные периоды изменения - сутки, месяц, год и так далее. Другими словами циклические процессы в природе, как правило, представляют собой совокупность более простых процессов различной частоты. Сделаем несколько предположений относительно структурного состава циклического процесса.

1. Состояние процесса характеризуется числовыми значениями некоторого параметра $p(t)$, являющегося функцией времени t и подверженного влиянию ряда факторов. Эта функция имеет циклический характер. Отличительным признаком циклической функции является то, что во времени ее значения складываются в последовательность циклов. Каждый цикл состоит из участка подъема (рост значений функции), который заканчивается точкой максимального значения a_{max} функции в данном цикле и участка спада (уменьшение ее значений), который заканчивается точкой минимального ее значения a_{min} в цикле. Далее начинается участок подъема уже следующего цикла и т. д.

2. Обозначим величину изменения значения параметра $p(t)$ за счет влияния *i*-го фактора в виде $f_i(t)$, предполагая, что эта величина добавляется или нет к значению параметра в момент времени t в зависимости от присутствия или отсутствия *i*-го фактора в данный момент времени. Таким образом, имеет место соотношение:

$$p(t) = \sum_i f_i(t), \quad (1)$$

где суммирование выполняется по всем факторам, влияющим на величину $p(t)$.

3. Факторы, влияющие на значение параметра $p(t)$, могут воздействовать на него стимулирующим образом, тогда для таких факторов имеет место:

$$0 \le f_i(t) \le b_i, \quad (2)$$

либо угнетающим образом, тогда имеет место:

$$a_i \le f_i(t) \le 0, \quad (3)$$

либо двояко, тогда имеет место:

$$a_i \le f_i(t) \le b_i, \quad (4)$$

где a_i и b_i нижняя и верхняя границы изменения значений функции $f_i(t)$. При этом, $p(t)$ увеличивается при $f_i(t) > 0$ и уменьшается при $f_i(t) < 0$. Функции $f_i(t)$ являются циклическими функциями времени, а сам параметр $p(t)$ в силу соотношения (1) является суммой циклических функций, которые называются его циклическими составляющими.

Для циклических функций используются также следующие понятия:

точка минимума и точка максимума $t_{\min}$ и $t_{\max}$ для данного цикла, где функция принимает значения $a_{\min}$ и $a_{\max}$, вообще говоря, различные в разных циклах,

период функции – разность $T = t_1 - t_2$, где t_1 это точка минимума функции в данном цикле, а t_2 это точка минимума в цикле, следующем за данным (период функции можно определять и через ее точки максимума), амплитуда циклической функции: $A = a_{\max} - a_{\min}$.

Период Т циклической функции и ее амплитуда A также, как и величины $a_{\min}$ и $a_{\max}$ могут быть различными в разных циклах и могут рассматриваться как случайные величины. Циклическую функцию назовем простой, если она имеет только одну из трех форм:

форму стимулирующего фактора, когда во всех циклах $a_{\min} = 0$,

форму угнетающего фактора, когда во всех циклах $a_{\max} = 0$,

форму стимулирующе-угнетающего фактора ($a_i \ne 0$ и $b_i \ne 0$).

Кроме того, в циклах простой циклической функции нет других экстремальных точек, кроме точки минимума $t_{\min}$ и точки максимума $t_{\max}$. В дальнейшем будем полагать, что в соотношении (1) все функции $f_i(t)$ являются простыми, так как любую циклическую функцию, не удовлетворяющую условиям простоты, можно представить в виде суммы простых циклических функций.

Совокупность циклических составляющих параметра $p(t)$ будем называть его динамической структурой. Выделив все структурные составляющие $p(t)$, мы тем самым сведем задачу его прогнозирования к более простым задачам прогнозирования отдельных его составляющих.

Первую циклическую составляющую $f_1(t)$ параметра $p(t)$ можно выделить, воспользовавшись информацией о расположении на оси времени точек минимумов и точек максимумов этого параметра. Так как $f_1(t)$ является составляющей $p(t)$, то, учитывая соотношение (1), $p(t)$ можно представить в виде:

$$p(t) = f_1(t) + g(t), \qquad (5)$$

где $g(t)$ – функция, которую будем называть базовой функцией для циклической составляющей $f_1(t)$. Будем предполагать, что функции $p(t)$, $f_1(t)$ и $g(t)$ непрерывны вместе со своими производными. Очевидно, что уравнение (5) имеет бесконечное множество решений, и чтобы выбрать среди них некоторое определенное, необходимо использовать дополнительные соображения. Рассмотрим следующие случаи.

a) Для циклической составляющей $f_1(t)$ выполняется соотношение (2);

b) Для циклической составляющей $f_1(t)$ выполняется соотношение (3);

c) Циклическая составляющая $f_1(t)$ такова, что выполняется соотношение (4).

В первом случае в точках своего минимума $t_1, t_2, t_3, \ldots$ функция $f_1(t) = 0$, поэтому согласно (5) $g(t_i) = p(t_i)$, $i = 1, 2, 3, \ldots$. Функция $g(t)$ получается путем ее аппроксимации некоторой гладкой кривой по известным значениям $g(t_i)$ в точках $t_1, t_2, t_3, \ldots$ Далее, используя соотношение (5), можно вычислять значения функции

$$f_1(t) = p(t) - g(t), \qquad (6)$$

для любого момента времени t. В результате описанной процедуры получается простая циклическая функция $f_1(t)$ в форме стимулирующего фактора. Процедура определения значений функции $f_1(t)$ в случае b) аналогична процедуре для случая a) за тем лишь исключением, что здесь вместо точек минимума функции $f_1(t)$ используются точки ее максимума, а в результате получается простая циклическая функция $f_1(t)$ в форме угнетающего фактора. В случае c) в качестве одного из возможных можно использовать следующий прием. По точкам минимума функции $f_1(t)$ описанным выше способом строится базовая функция $g_1(t)$, а по точкам максимума строится базовая функция $g_2(t)$. Значения функции $f_1(t)$ вычисляются по формуле

$$f_1(t) = p(t) - (g_2(t) - g_1(t))/2$$

и в результате получается простая циклическая функция $f_1(t)$ в форме (4).

Для того, чтобы воспользоваться описанными выше процедурами выделения циклической составляющей $f_1(t)$ параметра $p(t)$, в первую очередь необходимо, отталкиваясь от $p(t)$, определить моменты времени $t_1, t_2, t_3, \ldots$, которые являются точками минимума или точками максимума функции $f_1(t)$. Дифференцируя (5), получаем соотношение:

$$p'(t) = f_1^{'}(t) + g'(t), \qquad (7)$$

где $p'(t)$, $f_1^{'}(t)$ и $g'(t)$ это производные по времени функций $p(t)$, $f_1(t)$ и $g(t)$. Так как функция $f_1(t)$ циклическая, то и ее производная $f_1^{'}(t)$ также является циклической функцией, принимающей нулевые значения в точках минимумов и точках максимумов функции $f_1(t)$, максимальное положительное значение на участке подъема у функции $f_1(t)$ и минимальное отрицательное значение на участке спада у этой функции в каждом ее цикле. Поэтому задача определения точек минимумов и максимумов $f_1(t)$ сводится к задаче определения моментов времени, в которых $f_1^{'}(t)$ принимает нулевые значения.

Если величины производных $f_1^{'}(t)$ и $g'(t)$ близки либо близки периоды этих циклических функций, то они в равенстве (7) неразличимы. Поэтому не представляется возможным по известным значениям $p'(t)$ определить значения этих величин. Положение меняется, когда в одном цикле функции $g(t)$ помещается несколько циклов функции $f_1(t)$. То есть, когда период циклов у $g(t)$ в несколько раз больше периода циклов у $f_1(t)$ или другими словами частота функции $f_1(t)$ в несколько раз выше частоты функции $g(t)$. Это хорошо видно на примере синусоидальных функций $f_1(t) = A_1 \sin(\varpi_1 t)$ и $g(t) = A \sin(\varpi t)$. Здесь ϖ_1, ϖ - круговые частоты в радианах в единицу времени, которые выражаются через число колебаний $F_1 = 1$ (одно колебание в год) и $F = 1/10$ (одно колебание в 10 лет) в виде:

$$\varpi_1 = 2\pi F_1 = 2\pi \quad \text{и} \quad \varpi = 2\pi F = 2\pi/10.$$

Производные от этих функций имеют вид:

$$f_1^{'}(t) = A_1 2\pi \cos(\varpi_1 t),$$

$$g_1^{'}(t) = A 2\pi \cos(\varpi t)/10.$$

Так, что $g'(t)$ может сравняться с $f_1^{'}(t)$ только, если амплитуда A колебаний функции $g(t)$ окажется в 10 и более раз больше амплитуды A_1 колебаний функции $f_1(t)$. Таким образом, при определенном соотношении амплитуд значения функции $g'(t)$ по абсолютной величине оказываются меньше абсолютных значений у $f_1'(t)$. Это утверждение можно отразить следующим неравенством:

$$|f_1'(t)| > |g'(t)| \text{ для любых } t. \qquad (8)$$

Как отмечалось выше, в течение своего цикла функция $f_1'(t)$ принимает максимальное (положительное) и минимальное (отрицательное) значения. Поэтому в силу (8) и функция $p'(t)$ также будет иметь положительные и отрицательные значения в течение цикла функции $f_1'(t)$. То есть $p'(t)$ имеет циклы с таким же периодом, что и $f_1'(t)$, а, следовательно, в этих циклах имеет свои максимальные (положительные), минимальные (отрицательные) и нулевые значения, которые соответствуют локальным минимумам или максимумам функции $p(t)$.

Пусть в некоторый момент времени t_0 функция $p(t)$ имеет локальный минимум. Тогда в этот момент времени выполняется равенство:

$$p'(t_0) = f_1'(t_0) + g'(t_0) = 0, \qquad (9).$$

Из равенства (9) следует, что в случае, когда $g'(t_0) \neq 0$, то и $f_1'(t_0) \neq 0$. То есть, если в момент времени t_0 функция $g(t)$ не имеет экстремума, то и функция $f_1(t)$ тоже в этот момент времени его не имеет, хотя функция $p(t)$ согласно предположению имеет там локальный минимум. Другими словами функция $f_1(t)$ достигает своего локального минимума в какой-то другой момент времени t_1. Здесь возможно два случая:

1) в окрестности точек t_0 и t_1 при $t < t_0, t < t_1$ функция $f_1(t)$ убывает, а $g(t)$ возрастает, то есть выполняются соотношения:

$$f_1'(t) < 0, \, g'(t) > 0, \qquad (10),$$

2) в окрестности точек t_0 и t_1 при $t < t_0, t < t_1$ обе функции $f_1(t)$ и $g(t)$ убывают, то есть выполняются соотношения:

$$f_1'(t) < 0, \, g'(t) < 0. \qquad (11).$$

В случае (10) из (9) следует, что $f_1'(t_0) < 0$, то есть функция $f_1(t)$ в окрестности t_0 убывает, причем в силу наличия в момент времени t_0 локального минимума у $p(t)$, функция $f_1(t)$ при $t < t_0$ убывает быстрее, чем $g(t)$ возрастает. То есть для этих значений времени t имеет место $|f_1'(t)| > g'(t)$. Однако по мере приближения t к точке t_1 минимума функции $f_1(t)$ в силу непрерывности функции $f_1^{'}(t)$ значение $|f_1^{'}(t)|$, стремясь к 0, начинает уменьшаться и в момент времени $t_0 < t_1$ становится равным $g'(t_0)$. Это и обеспечивает локальный минимум функции $p(t)$ в этот момент времени. Далее, при $t > t_0$ значение $|f_1^{'}(t)|$ становится уже меньше $g'(t)$, в результате функция $p(t)$ начинает возрастать, несмотря на то, что функция $f_1(t)$ пока еще убывает. Итак, в случае (10) момент времени t_1, когда функция $f_1(t)$ достигает локального минимума, оказывается больше момента времени t_0, когда своего локального минимума достигает функция $p(t)$, при этом t_1 это наименьший момент времени, для которого имеет место $t_0 < t_1$ и $p^{'}(t_1) = g^{'}(t_1)$.

В случае (11) в результате убывания функций $f_1(t)$ и $g(t)$ убывает и функция $p(t)$. В некоторый момент времени t_1 функция $f_1(t)$ достигает своего локального минимума, и при $t > t_1$ начинает возрастать, из-за чего $f_1^{'}(t)$ меняет свой знак на положительный. При этом функция $p(t)$ продолжает убывать, так как вблизи локального минимума функции $f_1(t)$ ее производная $f_1^{'}(t)$ близка к нулю, а функция $g(t)$ убывает. Далее, при возрастании t значения функции $f_1^{'}(t)$ возрастают и в некоторый момент $t_0 > t_1$ значение $f_1^{'}(t_0)$ становится равным $|g'(t_0)|$, что обеспечивает локальный минимум функции $p(t)$ в точке t_0. Отсюда следует, что в случае (11) момент времени t_1, когда функция $f_1(t)$ достигает локального минимума, оказывается меньше момента времени t_0, когда своего локального минимума достигает функция $p(t)$. При этом t_1 это наибольший момент времени, для которого имеет место $t_1 < t_0$ и $p^{'}(t_1) = g^{'}(t_1)$.

Равенство производных $p^{'}(t_1)$ и $g'(t_1)$ в точке t_1 минимума функции $f_1(t)$ позволяет определить геометрическую интерпретацию разложения (5) в этой точке. Эта интерпретация заключается в том, что касательная к кривой на графике функции $p(t)$ в точке $t = t_1$ совпадает с касательной к кривой на графике функции $g(t)$ в этой точке. Порядок определения расположения локальных максимумов функции $f_1(t)$ аналогичен описанному порядку для минимумов.

В тех случаях, когда соотношение периодов у функций $f_1(t)$ и $g(t)$ и их амплитуд таково, что (8) не выполняется, то не всем точкам минимума и точкам максимума функции $f_1(t)$ у функции $p(t)$ будут соответствовать локальные минимумы и максимумы. Поэтому описанная выше процедура построения функции $g(t)$ по локальным минимумам или локальным максимумам исходной функции $p(t)$ дает неточный результат в том смысле, что у функции $f_1(t)$, вычисляемой по формуле (6), появятся локальные минимумы и максимумы, дополнительные к тем, которые соответствуют локальным минимумам и максимумам функции $p(t)$. При этом $f_1(t)$ уже не будет простой циклической функцией. Однако ее можно рассмотреть в качестве исходной функции $p(t)$ и применить к ней описанную процедуру выделения новой функции $f_1(t)$ уже с использованием дополнительных локальных минимумов или максимумов, получившихся на предыдущем шаге и так далее до тех пор, пока в результате очередного шага этого циклического процесса выделения функции $f_1(t)$ не получится простая циклическая функция, которая и станет окончательной.

После окончательного определения функции $f_1(t)$, которая удовлетворяет условиям простоты, определяется функция $g(t)$ из равенства $g(t) = p(t) - f_1(t)$. Далее запускается процесс выделения очередной простой циклической функции $f_2(t)$, у которого роль функции $p(t)$ играет полученная на первом шаге функция $g(t)$, и так далее, пока функция $g(t)$ на очередном шаге не окажется простой циклической или монотонной функцией. На этом процесс разложения исходной функции $p(t)$ на ряд циклических составляющих $f_1(t), f_2(t), \dots, f_i(t), \dots$ завершается. Очевидно, что на очередном i-м шаге описанного процесса выделения простой циклической функции частота функции $f_i(t)$ оказывается меньше частоты функции $f_{i-1}(t)$, полученной на предыдущем $i-1$-м шаге не менее, чем в два раза, поэтому разложение любой функции $p(t)$, определенной на любом конечном отрезке времени $T_1 < t < T_2$, завершится за конечное число шагов.

В современной литературе чаще всего описываются методы одношаговой идентификации процессов в системах управления, когда определяются только функции $f_1(t)$ и $g(t)$, где $f_1(t)$ – это шум, порождаемый ошибками измерений или другими причинами, а $g(t)$ – идентифицируемая функция [1]. Многошаговая идентификация циклических процессов, представленная в данной работе, в значительной мере облегчает задачу прогнозирования поведения таких процессов, особенно внутри очередного цикла очередной циклической составляющей $f_i(t)$ между точками минимума $t_{\min}$ и максимума $t_{\max}$, так как на этом отрезке монотонна. Более сложной задачей является прогнозирование положения очередной точки минимума или максимума и значения амплитуды функции в очередном цикле в силу того, что эти величины, как правило, являются случайными. В некоторых случаях их можно, в свою очередь, представить как функции времени, которые могут тоже оказаться циклическими и поддающимися разложению на циклические составляющие со всеми вытекающими отсюда последствиями.

Список литературы

1. Эйкгофф П. Основы идентификации систем управления. – М.: Мир, 1975. – 683 с.

CYCLICAL PROCESSES DYNAMICAL STRUCTURE ANALISES

Sidristy B.A.

Kamyshin technological institute (branch) of the state
educational establishment of higher professional education
«Volgograd state technical university»

The issue presents the technique of complex cyclical processes decomposition to the line of simple cyclical components with different period of cycle duration. The technique is to be applied for identification and prognoses cyclical processes running in time.

Keywords: cyclic process, forecasting cyclical processes, the identification of cyclical processes, the structure of a cyclic process.