

НЕСТАЦИОНАРНОЕ ТЕЧЕНИЕ ВЯЗКОУПРУГОЙ ЖИДКОСТИ В ЗАЗОРЕ МЕЖДУ ДВУМЯ ПЛАСТИНАМИ*

Меркулов В.И.

Институт теоретической и прикладной механики СО РАН, Новосибирск, Россия, e-mail: vimer@academ.org

Рассматривается течение между двумя бесконечными плоскостями, одна из которых совершает периодические колебания. Неньютоновская жидкость описывается моделью Фойхта–Олдройта, применимой для движения эмульсии одной жидкости в другой. Такая жидкость обладает свойством релаксации, которое порождает волну релаксации. Полученные результаты могут быть использованы для определения вязкости и постоянной релаксации по результатам физических измерений.

Ключевые слова: вискозиметрия, гемодинамика, реология.

UNSTEADY FLOW OF VISCOELASTIC FLUID IN THE GAP BETWEEN TWO PLATES

Merkulov V.I.

Institute of Theoretical and Applied Mechanics, Novosibirsk, Russia, e-mail: vimer@academ.org

The flow between two infinite planes, one of which performs periodic oscillations. Non-Newtonian fluid described by the Voigt-Oldroyd, applicable to the movement of emulsion of one liquid in another. This liquid has the property of relaxation, which generate a wave of relaxation. The results can be used to determine the viscosity of the continuous relaxation and as a result of physical measurements.

Keywords: viscometry, hemodynamics, rheology.

Введение

В работах [1; 2] приводятся результаты наблюдений за пульсирующим движением крови в капиллярном сосуде. Факт наличия волнового процесса в капиллярах, где силы вязкости на шесть порядков превосходят инерционные силы, требует неординарного подхода для своего объяснения.

В попытках найти объяснения этим аномальным эффектам привлекают неньютоновские свойства крови [3; 4]. Однако из возможных моделей неньютоновских жидкостей используются преимущественно стационарные модели. В то же время известно, что средний расход при пульсирующем давлении больше, чем при постоянном давлении [5].

В попытке объяснить эти преимущества автор работы выдвинул гипотезу, согласно которой кровь обладает сдвиговой упругостью [6].

Кровь представляет собой раствор и суспензию белковых высокомолекулярных соединений. Английский исследователь Олдройт [7], конкретизируя модель Фойхта [8], теоретическим путем вывел зависимость касательного напряжения от скорости сдвига для эмульсий и суспензий одной ньютоновской жидкости в другой. В отличие от закона Ньютона, эта зависимость содержит не только скорость сдвига, но и временную

* Работа поддержана грантом 13.G25.31.0071 (Н-01/08-10).

производную от нее. В используемой им модели учитывается энергия упругой деформации, которая накапливается в процессе течения благодаря межфазному натяжению. После того как напряжение снято, эта энергия поддерживает напряжение в течение времени релаксации. Такая модель, как показали эксперименты, хорошо описывает поведение растворов некоторых полимеров.

Так как кровь представляет собой эмульсию и суспензию белковых высокомолекулярных соединений, то естественно предположить, что модель Фойхта–Олдройта применима и к крови.

Математическая модель

На рис. 1 приведена схема течения между двумя пластинами и профиль скоростей в разные моменты времени.

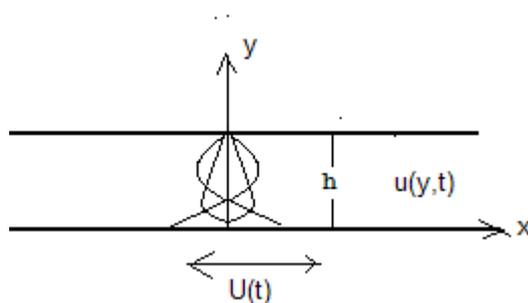


Рис. 1. Схема течения между двумя пластинами и профиль скоростей в разные моменты времени.

Здесь принимается следующее краевое условие на нижней

$$U(t) = u(0, t) = U_0 \cos \omega t \quad (1)$$

и верхней

$$u(h, t) = 0 \quad (2)$$

границах.

Закон Фойхта–Олдройта, связывающий касательное напряжение τ_{xy} с величиной скорости деформации $\sigma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y}$, в общем случае записывается так:

$$\tau_{ij} = \mu \left[1 + T_v \left(\frac{\partial}{\partial t} + w \frac{\partial}{\partial x} \right) \right] \sigma_{ij}.$$

Здесь μ , T_v , w – вязкость, постоянная релаксации и скорость течения соответственно.

В рассматриваемом случае, когда течение не зависит от переменной x , это соотношение принимает такой вид:

$$\tau_{yx} = \mu \left[1 + T_V \frac{\partial}{\partial t} \right] \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (3)$$

Уравнение импульса для несжимаемой жидкости имеет следующий вид:

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}. \quad (4)$$

Используя соотношение (3), получим

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \mu T_V \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \quad (5)$$

Для сравнительной оценки входящих сюда составляющих полезно воспользоваться безразмерными зависимыми и независимыми переменными v, τ, ξ , введенными следующими соотношениями:

$$u = U_0 v, t = T \tau, y = h \xi, \text{ где } U_0, T, h - \text{ масштабы соответствующих величин.}$$

В новых переменных уравнение импульса запишется так:

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{\mu T}{\rho h^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + \frac{\mu T V}{\rho h^2} \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}.$$

Заметим, что интересующие нас процессы (пульсирующее течение крови в артериальном русле) имеют период порядка одной секунды, а постоянная релаксации на два порядка меньше [6]. Таким образом, в первом приближении уравнение импульса для ньютоновской жидкости

$$\rho \frac{\partial u_0}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} \quad (6)$$

будет совпадать с уравнением импульса для вязкоупругой жидкости, так же как и будут совпадать краевые условия (1), (2).

Уравнение (3) подвергнем преобразованию Фурье по временной переменной:

$$\begin{aligned} \tau_c &= \mu \left[\frac{\partial u_c}{\partial y} - i T_V \omega \frac{\partial u_s}{\partial y} \right], \\ \tau_s &= \mu \left[\frac{\partial u_s}{\partial y} + T_V \omega \frac{\partial u_c}{\partial y} \right], \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь использованы общепринятые обозначения:

$$\begin{aligned} \tau_c &= \frac{\omega}{2\pi} \int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} \tau \cos \omega t dt, & \tau_s &= \frac{\omega}{2\pi} \int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} \tau \sin \omega t dt, \\ u_c &= \frac{\omega}{2\pi} \int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} u \cos \omega t dt, & u_s &= \frac{\omega}{2\pi} \int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} u \sin \omega t dt. \end{aligned}$$

Введением комплексных функций

$$\Gamma = \tau_c + i\tau_s, U(y) = u_c + iu_s$$

два последних соотношения можно свести к одному:

$$\Gamma = \mu[1 + iT_v\omega] \frac{dU(y)}{dy}. \quad (8)$$

Комплексную скорость U представим в виде суммы:

$$U = U_0(y) + (T_v/T)U_1(y).$$

Здесь первое слагаемое соответствует скорости ньютоновской жидкости с нулевым временем релаксации, а второе слагаемое в явном виде зависит от времени релаксации.

Подставим это представление в выражение (8):

$$\begin{aligned} \Gamma &= \mu[1 + iT_v\omega] \left[\frac{dU_0(y)}{dy} + (T_v/T) \frac{dU_1(y)}{dy} \right] = \\ &= \mu[1 + iT_v\omega] \left[\frac{dU_0(y)}{dy} + (T_v/T) \frac{dU_1(y)}{dy} \right] = \\ &= \mu \left[\frac{dU_0(y)}{dy} + (T_v/T) \frac{dU_1(y)}{dy} \right] + iT_v\omega\mu \left[\frac{dU_0(y)}{dy} + (T_v/T) \frac{dU_1(y)}{dy} \right]. \end{aligned}$$

Теперь мы можем получить:

$$\begin{aligned} \Gamma &= \mu[1 + iT_v\omega] \left[\frac{dU_0(y)}{dy} + (T_v/T) \frac{dU_1(y)}{dy} \right] = \\ &= \mu[1 + iT_v\omega] \left[\frac{dU_0(y)}{dy} + (T_v/T) \frac{dU_1(y)}{dy} \right] = \\ &= \mu \left[\frac{dU_0(y)}{dy} + (T_v/T) \frac{dU_1(y)}{dy} \right] + iT_v\omega\mu \left[\frac{dU_0(y)}{dy} + (T_v/T) \frac{dU_1(y)}{dy} \right]. \\ \tau_c &= \mu \left[\frac{dU_0(y)}{dy} + (T_v/T) \frac{dU_1(y)}{dy} \right], \\ \tau_s &= T_v\omega\mu \left[\frac{dU_0(y)}{dy} + (T_v/T) \frac{dU_1(y)}{dy} \right]. \end{aligned}$$

Здесь использовано то обстоятельство, что функция $U_0(y)$ является вещественной функцией.

Для интересующего нас случая малого времени релаксации последние соотношения можно заменить приближенными:

$$\begin{aligned} \tau_c &= \mu \frac{dU_0(y)}{dy} + O(T_v/T), \\ \tau_s &= T_v\omega\mu \frac{dU_0(y)}{dy} + O(T_v/T)^2. \end{aligned}$$

Заметим, что величины τ_c , τ_s имеют разные порядки малости, однако относительные погрешности у них одинаковы, причем обе величины определяются через скорость течения ньютоновской жидкости, которое описывается краевой задачей (1), (2), (6).

Решение уравнений

Решение уравнения (6) при краевых условиях (1), (2), как известно [9], имеет такой вид:

$$u_0(y,t) = U_0 \operatorname{Re} e l \left[\frac{Shk(h-y)}{Shkh} \exp(i\omega t) \right] \text{ где } k = \sqrt{\frac{\omega\rho}{2\mu}}(1+i). \quad (9)$$

Это позволяет нам вычислить касательное напряжение на верхней границе

$$\begin{aligned} \tau_{yx} &= \mu \operatorname{Re} e l \left[\frac{\partial}{\partial y} (u_0 + i\omega T_V u_0) \right] = \mu \operatorname{Re} e l \left[\frac{\partial u_0}{\partial y} (1 + i\omega T_V) \right] = \\ &= -\mu U_0 \operatorname{Re} e l \left[\frac{k(1 + i\omega T_V)}{Shkh} \exp(i\omega t) \right]. \end{aligned}$$

Разложим входящую сюда функцию на мнимую и вещественную часть:

$$\frac{k(1 + i\omega T_V)}{Shkh} = A(T_V) + iB(T_V).$$

Здесь мы выделили зависимость этих параметров от постоянной релаксации.

Касательное напряжение теперь можно выразить так:

$$\begin{aligned} \tau_{yx} &= \mu \operatorname{Re} e l \left[\frac{\partial}{\partial y} (u_0 + i\omega T_V u_0) \right] = \mu \operatorname{Re} e l \left[\frac{\partial u_0}{\partial y} (1 + i\omega T_V) \right] = \\ &= -\mu U_0 [A(T_V) \cos \omega t - B(T_V) \sin \omega t] \end{aligned} \quad (10)$$

Полученная формула позволяет определить вязкость и постоянную релаксации по результатам измерения касательного напряжения.

Для этого необходимо экспериментальную кривую для касательного напряжения представить в виде суммы

$$\tau(h,t) = \tau_c \cos(\omega t) + \tau_s \sin(\omega t), \quad (11)$$

в которой коэффициенты представляют собой косинус и синус преобразования Фурье экспериментальной кривой.

Подстановка этого представления в формулу (9) позволяет получить систему уравнений:

$$\begin{aligned} \tau_c &= -\mu U_0 A(T_V), \\ \tau_s &= \mu U_0 B(T_V). \end{aligned} \quad (12)$$

Для малых значений толщины зазора h , для которого выполняется условие $|kh| < 1$, соотношение (9) упрощается:

$$\frac{(1+i\omega T_V)}{h} = A(T_V) + iB(T_V),$$

Откуда следует:

$$A(T_V) = \frac{1}{h}, B(T_V) = \frac{nT_V}{h}.$$

При этом система уравнений (12) распадается на два уравнения:

$$\tau_c = -\frac{\mu U_0}{h}, \tau_s = \mu U_0 \frac{\omega T_V}{h} \quad (13)$$

$$\text{или } -\tau_c / \tau_s = \omega T_V,$$

которые и служат для определения вязкости и постоянной релаксации через измеряемые параметры.

В последних формулах следует учесть, что касательное напряжение на пластине имеет противоположный знак к напряжению в жидкости и, следовательно, имеет отрицательное значение.

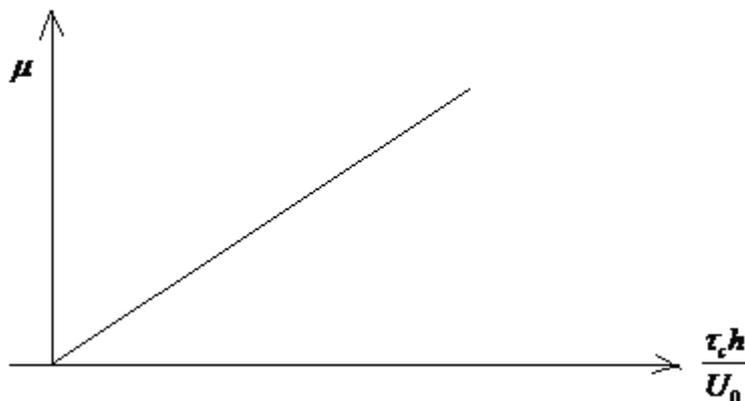


Рис. 2.

Заметим, что касательное напряжение вязкого и упругого происхождения во все уравнения входило в виде суперпозиции. Но действие вязких сил совпадает по фазе с колебанием нижней пластины, а действие упругих сил сдвинуто по фазе на 90 градусов. Это свойство сил разного происхождения позволило нам выделить каждую из составляющих. Это очень важно потому, что составляющие имеют разный порядок, как разный порядок имеют и погрешности каждой из них.

Первая из формул (13), которая определяет вязкость, выполняется с погрешностью порядка ωT_V . Точное значение вязкости будет представляться суммой $\hat{\mu} = \mu + \mu_1 \omega T_V$. Погрешность в определении вязкости влечет за собой погрешность в определении

постоянной релаксации. Однако эта погрешность будет иметь порядок $(\omega T_{\gamma})^2$. Таким образом, для разнопорядковых величин мы имеем одинаковые относительные погрешности.

Заключение

Полученные в данной работе функциональные зависимости позволяют конструировать приборы, предназначенные для измерения вязкости и постоянной релаксации, которые в свою очередь могут быть использованы для диагностики состояния крови.

Список литературы

1. Zweifach B.W. Quantitative studies of microcirculatory structure and function. I I Direct measurement of capillary pressure in splanchnic mesenteric vessels // *Circul. Res.* – 1974. – Vol. 34. – No. 6. – P. 843–866.
2. Механика кровообращения / Каро К. [и др.]. – М. : Мир, 1982. – 624 с.
3. Орлов В.В. Плетизмография: методы и применение в экспериментальных и клинических исследованиях. – М. ; Л. : Изд-во АН СССР, 1961. – 261 с.
4. Green H.D., Rapela C.E., Conrad M.C. Resistance (conductance) and capacitance phenomena in terminal vascular beds // *Handbook of Physiology. Sect. 2. Circulation.* Washington D.C. – 1963. – Vol. 2. – P. 935–961.
5. Burton A.C. Physical principles of circulatory phenomena: the physical equilibria of the heart and blood vessels // *Handbook of Physiology. Sect. 2. Circulation.* Washington D.C. – 1962. – Vol. 1. – P. 207–212.
6. Меркулов В.И. Новые открытия и новые задачи гидромеханики. – Изд. НГТУ, Новосибирск, 2010. – 160 с.
7. Oldroyd J.G. // *Proc. Roy. Soc.*, 1953. – Vol. 218A. – P. 122.
8. Уилкинсон У.Л. Неньютоновские жидкости. – М. : Мир, 1964. – 216 с.
9. Тихонов А.И., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М. : Наука, 1977. – 660 с.

Рецензенты:

Кирьянов Б.Ф., д.т.н., профессор, профессор кафедры прикладной математики и информатики Новгородского государственного университета им. Ярослава Мудрого, Министерства образования и науки РФ, г. Великий Новгород.

Дмитриев А.К., д.ф.-м.н., профессор, декан физико-технического факультета Новосибирского государственного технического университета, г. Новосибирск.

Кобцев С.М., д.ф.-м.н., заведующий отделом лазерной физики и инновационных технологий Новосибирского государственного университета, г. Новосибирск.

Работа получена 28.10.2011