

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ОБЪЕКТОВ, ЗАДАННЫХ СОСТАВНЫМИ СИСТЕМАМИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Галкин А.В., Дятчина Д.В.

ФГБОУ ВПО Липецкий государственный технический университет, Липецк
Липецк, Россия (398600, г. Липецк, ул. Московская 30), e-mail: avgalkin82@mail.ru

Рассмотрена математическая модель рабочего процесса инерционного трансформатора вращающего момента, которая представляет собой составные системы дифференциальных уравнений. Рассмотрены численные алгоритмы решения систем дифференциальных уравнений для математической модели инерционного трансформатора вращающего момента. Получено численное решение математической модели методом Фельберга с переменным шагом. Переменный шаг использовался как для достижения точности самого метода, так и для получения необходимой точности начальных условий. В случае составных систем дифференциальных уравнений конечные условия одной системы являются начальными для следующей, поэтому и возникает необходимость точного определения этих условий. Проведен анализ полученного решения и его сравнение с численным решением, получаемым методом Рунге – Кутты четвертого порядка. Анализ показал, что при не меньшей точности метод Фельберга требует значительно меньшее количество вычислений.

Ключевые слова: системы дифференциальных уравнений, инерционный трансформатор вращающего момента, математическая модель, численное интегрирование, метод Фельберга, метод Рунге – Кутты.

NUMERICAL DECISION OF MATHEMATICAL MODELS OF OBJECTS GIVEN BY COMPONENT SYSTEMS OF THE DIFFERENTIAL EQUATIONS

Galkin A.V., Dyatchina D.V.

Lipetsk state technical university, Lipetsk
Lipetsk, Russia (398600, Lipetsk, Moskovskaya street, 30), e-mail: avgalkin82@mail.ru

The mathematical model of working process of the inertial transformer of the moment of rotation is considered. Model describe component systems of the differential equations. The numerical algorithms of the decision of systems of the differential equations for mathematical model of the inertial transformer of the moment of rotation are considered. The numerical decision of mathematical model by Felberg method with a variable step is received. The variable step was used both for obtaining of accuracy of the method, and for reception of necessary accuracy of the initial conditions. In case of component systems of the differential equations the final conditions of one system are initial for following, therefore there is a necessity of exact definition of these conditions. The analysis of the received decision and its comparison with numerical decision, received method of Runge – Kutt of the fourth order is execution. The analysis has shown, that the method of Felberg demands considerably smaller quantity of calculations.

Key words: systems of the differential equations, inertial transformer of the moment of rotation, mathematical model, numerical integration, method of Felberg, method of Runge – Kutt.

При математическом моделировании современных технических устройств возникают сложные составные системы нелинейных дифференциальных уравнений. Исследование функционирования таких систем не может обойтись без решения полученных уравнений математи-

ческой модели. Если дифференциальные уравнения, описывающие работу таких систем, являются нелинейным и нестационарными, то часто невозможно получить их аналитическое решение. Возникает необходимость использовать численные методы, наиболее известным из которых является метод Рунге – Кутты [4]. При этом если математическая модель состоит из нескольких систем дифференциальных уравнений, описывающих отдельные участки функционирования, то возникает задача определения моментов перехода от одной системы к другой. Для модели, заданной составными системами дифференциальных уравнений, условия окончания одного этапа служат начальными значениями для другого. При численном решении неизбежно возникает погрешность, связанная как с погрешностью самого метода, так и с погрешностью начальных условий. Погрешности, возникающие при моделировании функционирования таких систем, могут сильно влиять на итоговое решение и вызывать существенные отклонения от значений процесса реального объекта.

В связи с этим возникает необходимость использовать эффективные численные алгоритмы решения систем дифференциальных уравнений, позволяющие быстро и с контролируемой погрешностью находить решение.

В качестве примера модели, заданной составными системами дифференциальных уравнений, рассмотрим инерционный трансформатор вращающего момента (ИТВМ) с учетом упругих свойств механизма свободного хода [2]. ИТВМ является бесступенчатой передачей механического типа, обладающей внутренним автоматизмом, то есть способностью автоматически изменять передаточное отношение в зависимости от угловой скорости выходного вала и величины нагрузки внешнего сопротивления [5].

Математической моделью являются системы обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих движение обобщенной физической модели инерционного трансформатора [3]. Работа инерционного трансформатора имеет циклический характер. В течение цикла выделяются четыре участка, на которых дифференциальные уравнения движения не меняются:

- разгон реактора до угловой скорости ведомого маховика;
- совместное движение реактора и ведомого маховика;
- торможения реактора до остановки;
- выстой реактора.

Система уравнений, описывающая первый участок:

$$\begin{cases} B_1(\psi)\ddot{\phi}_{21} + B_2(\psi)\ddot{\phi}_{22} - B_4(\psi)(\dot{\phi}_{21} - \dot{\phi}_{22})^2 + B_6(\psi)\dot{\phi}_{22}^2 = M_D; \\ B_2(\psi)\ddot{\phi}_{21} + B_3\ddot{\phi}_{22} - B_6(\psi)\dot{\phi}_{21}^2 = 0; \\ J_{\Pi}\ddot{\phi}_1 = -M_C. \end{cases} \quad (1)$$

Условием перехода является достижение угловой скорости реактора угловой скорости ведомого звена, т.е. $\dot{\varphi}_1(t_1) = \dot{\varphi}_{22}(t_1)$. В момент времени t_1 происходит переход рабочего процесса во второй такт.

Система уравнений, описывающая второй участок:

$$\begin{cases} B_1(\psi)\ddot{\varphi}_{21} + B_2(\psi)\ddot{\varphi}_{22} - B_4(\psi)(\dot{\varphi}_{21} - \dot{\varphi}_{22})^2 + B_6(\psi)\dot{\varphi}_{22}^2 = M_D, \\ B_2(\psi)\ddot{\varphi}_{21} + B_5\ddot{\varphi}_{22} - B_6(\psi)\dot{\varphi}_{21}^2 + (P_1((\varphi_{22} - \varphi_{22}^{ik}) - (\varphi_1 - \varphi_1^{ik})) + P_2) + \\ + J_{22} |\ddot{\varphi}_{22}^{ik}| = 0, \\ J_1\ddot{\varphi}_1 - (P_1((\varphi_{22} - \varphi_{22}^{ik}) - (\varphi_1 - \varphi_1^{ik})) + P_2) - J_{22} |\ddot{\varphi}_{22}^{ik}| = -M_C. \end{cases} \quad (2)$$

Условием перехода является поворот сателлита в относительном движении на π радиан, т.е. $\varphi_{21}(t_2) - \varphi_{22}(t_2) = \frac{\pi}{a}$. В момент времени t_2 происходит переход рабочего процесса в третий такт.

Система уравнений, описывающая третий участок, имеет такие же уравнения, что и на первом.

Условием перехода является достижение реактором угловой скорости равной нулю, т.е. $\dot{\varphi}_{22}(t_3) = 0$. В момент времени t_3 происходит переход рабочего процесса в четвертый такт.

Система уравнений, описывающая четвертый участок:

$$\begin{cases} B_1(\psi)\ddot{\varphi}_{21} + B_2(\psi)\ddot{\varphi}_{22} - B_4(\psi)(\dot{\varphi}_{21} - \dot{\varphi}_{22})^2 + B_6(\psi)\dot{\varphi}_{22}^2 = M_D, \\ B_2(\psi)\ddot{\varphi}_{21} + B_5\ddot{\varphi}_{22} - B_6(\psi)\dot{\varphi}_{21}^2 + (P_3(\varphi_{22} - \varphi_{22}^{ik}) + P_4) + J_{22} |\dot{\varphi}_{22}^{ik}| = 0, \\ J_1\ddot{\varphi}_1 = -M_C. \end{cases} \quad (3)$$

Условием перехода является поворот сателлита в относительном движении на 2π радиан, т.е. $\varphi_{21}(t_4) - \varphi_{22}(t_4) = \frac{2\pi}{a}$,

где $\varphi_i, \dot{\varphi}_i$ – обобщенные координаты и обобщенные скорости,

$$B_1(\psi) = J_{21} + nme^2 + 2nmed(1+a)\cos\psi + nJ_\Gamma(1+a)^2,$$

$$B_2(\psi) = -anJ_\Gamma(1+a) - nmaed\cos\psi, \quad B_3 = J_{22} + nJ_\Gamma a^2,$$

$$B_4(\psi) = nmaed(1+a)\sin\psi, \quad B_5 = B_3 + J_\Pi, \quad B_6(\psi) = nmaed\sin\psi, \quad \psi(t) = a(\varphi_{21} - \varphi_{22}),$$

a – внутреннее передаточное отношение; n – число грузовых звеньев;

m – масса грузового звена; d – расстояние от оси вращения грузового

звена до его центра тяжести; e – расстояние от оси вращения ИТВМ до

оси вращения грузового звена; J_{21} – приведенный момент инерции

ведущих элементов; J_{22} – приведенный момент инерции ведущей части

реактора; J_Π – приведенный момент инерции ведомых элементов;

J_{Γ} – приведенный момент инерции грузового звена.

Выражения $P_1((\varphi_{22} - \varphi_{22}^{ilk}) - (\varphi_1 - \varphi_1^{ilk})) + P_2$ и $P_3(\varphi_{22} - \varphi_{22}^{i3k}) + P_4$ являются упругими моментами и входят в уравнения в линейном виде. Коэффициенты P_1, P_2, P_3, P_4 определяют жесткость пружины и материалов между ведомым валом и реактором.

Начальные условия для первого участка $\varphi_{21}(0) = \varphi_{210}, \dot{\varphi}_{21}(0) = \dot{\varphi}_{210}, \varphi_{22}(0) = \varphi_{220}, \dot{\varphi}_{22}(0) = \dot{\varphi}_{220}, \varphi_1(0) = \varphi_{10}, \dot{\varphi}_1(0) = \dot{\varphi}_{10}$.

В качестве начальных значений для последующих участков используются конечные значения предыдущего участка, что вытекает из непрерывности процесса.

Решение каждой из систем дифференциальных уравнений (1)-(3) находится численно. Если использовать метод Рунге – Кутты четвертого порядка с шагом 10^{-5} , то при условиях (4) требуется 1634 шага с четырьмя вычислениями функции правой части на каждом шаге.

$$\begin{aligned} i &= 0.5, \varphi_{210} = 0, \dot{\varphi}_{210} = 334 \text{ с}^{-1}, \varphi_{220} = 0, \dot{\varphi}_{220} = 0 \text{ с}^{-1}, \\ \varphi_{10} &= 0, \dot{\varphi}_{10} = i \cdot \dot{\varphi}_{210}, J_{21} = 3.15 \text{ кг} \cdot \text{м}^2, J_{22} = 0.075 \text{ кг} \cdot \text{м}^2, \\ n &= 6, m = 1 \text{ кг}, a = 1.6, e = 0.14 \text{ м}, J_{\Pi} = 19 \text{ кг} \cdot \text{м}^2, \\ d &= 0.03 \text{ м}, M_{\Pi} = 383 \text{ Н} \cdot \text{м}, M_C = 800, J_{\Gamma} = 0.00121 \text{ кг} \cdot \text{м}^2, \\ P_1 &= 31426 \text{ Нм} \cdot \text{с}, P_2 = 95.171 \text{ Нм}, P_3 = 55409 \text{ Нм} \cdot \text{с}, P_4 = 60.046 \text{ Нм}. \end{aligned} \quad (4)$$

Применим для решения данной задачи модификацию метода Рунге – Кутты, предложенную Фельбергом [1]:

$$\begin{aligned} y_1^{(5)} &= y_0 + \frac{16}{135} k_1 + \frac{6656}{12825} k_3 + \frac{28561}{56430} k_4 - \frac{9}{50} k_5 + \frac{2}{55} k_6, \\ k_1 &= hf(x_0, y_0), \\ k_2 &= hf(x_0 + \frac{1}{4}h, y_0 + \frac{1}{4}k_1), \\ k_3 &= hf(x_0 + \frac{3}{8}h, y_0 + \frac{3}{32}k_1 + \frac{9}{32}k_2), \\ k_4 &= hf(x_0 + \frac{12}{13}h, y_0 + \frac{1932}{2197}k_1 - \frac{7200}{2197}k_2 + \frac{7296}{2197}k_3), \\ k_5 &= hf(x_0 + h, y_0 + \frac{439}{216}k_1 - 8k_2 + \frac{3680}{513}k_3 - \frac{845}{4104}k_4), \\ k_6 &= hf(x_0 + \frac{1}{2}h, y_0 - \frac{8}{27}k_1 + 2k_2 - \frac{3544}{2565}k_3 + \frac{1859}{4104}k_4) - \frac{11}{40}k_5. \end{aligned} \quad (5)$$

Формула имеет пятый порядок точности.

На каждом шаге требуется производить шесть вычислений функции правой части, что больше, чем при классическом методе Рунге – Кутты четвертого порядка.

Используем следующий метод оценки погрешности. Вычисляем разность приближенных значений решения, полученных в одной точке. При этом в отличие от правила Рунге, ис-

пользуем не разный шаг интегрирования, а две формулы разных порядков точности с одним и тем же шагом. Если коэффициенты для этих разных формул будут совпадать, то это позволит уменьшить количество вычислений функции правой части систем дифференциальных уравнений.

Формула Фельберга четвертого порядка имеет следующий вид [1]:

$$y_1^{(4)} = y_0 + \frac{25}{216}k_1 + \frac{1408}{2565}k_3 + \frac{2197}{4104}k_4 - \frac{1}{5}k_5.$$

Коэффициенты определяются по тем же формулам (5), что и для формулы Фельберга пятого порядка точности.

Контрольный член для погрешности как разность двух формул в одной точке запишется в следующем виде:

$$E = \frac{1}{360}k_1 - \frac{128}{4275}k_3 - \frac{2197}{75240}k_4 + \frac{1}{50}k_5 + \frac{2}{55}k_6,$$

и имеет порядок точности $O(h^5)$.

Для оценки погрешности по правилу Рунге для методов четвертого порядка требуется одиннадцать вычислений правой части, а метод Фельберга потребует всего шесть вычислений.

Для повышения точности получаемых решений используем также переменный шаг интегрирования. Для метода Фельберга изменение шага интегрирования происходит на основании следующих правил:

- 1) если $|E| > \varepsilon$, то шаг уменьшается вдвое $h^{(2)} = \frac{1}{2}h^{(1)}$, где ε - заданная точность;
- 2) если $|E| < \frac{\varepsilon}{32}$, то шаг удваивается $h^{(2)} = 2h^{(1)}$;
- 3) если $\frac{\varepsilon}{32} < |E| < \varepsilon$, то шаг не изменяется.

Кроме погрешности самого метода, существенное влияние на точность полученного решения имеет и погрешность начальных условий. Учитывая, что для рассматриваемой модели рабочего процесса ИТВМ в качестве начальных значений для последующих участков используются конечные значения предыдущего участка, вычисленные приближенно, то возникает погрешность начальных условий. С целью ее минимизации используем алгоритм деления шага пополам.

Обозначим $C = 0$ условия перехода, где C определяется при численном решении систем дифференциальных уравнений. Если $C > \delta$, то уменьшаем шаг вдвое $h^{(2)} = \frac{1}{2}h^{(1)}$.

Решение модели рабочего процесса методом Фельберга с $\varepsilon = 0.1$, $\delta = 0.01$ и начальным шагом $h = 10^{-5}$ с представлено на рис. 1.

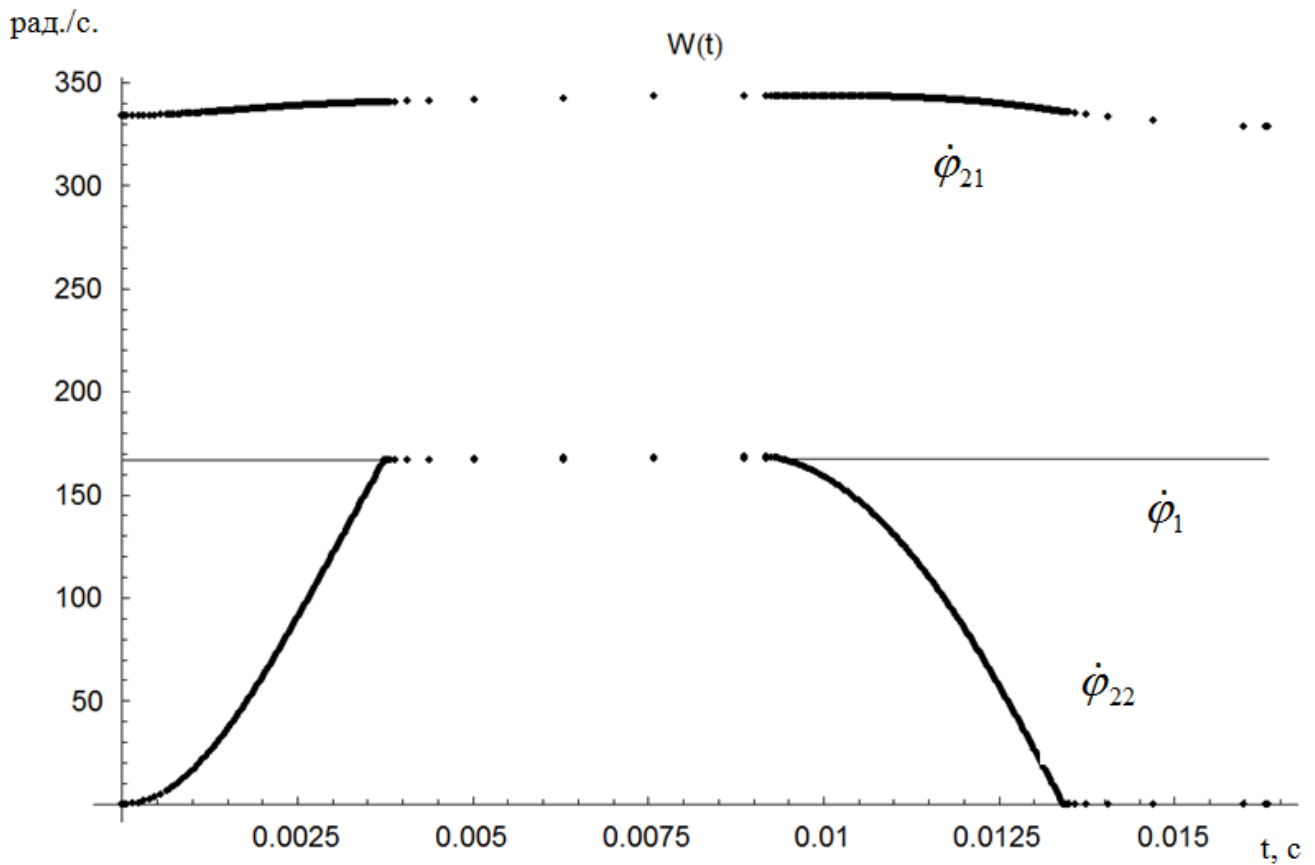


Рис. 1. Графики изменения угловых скоростей

Сравним результаты, получаемые методом Рунге – Кутты четвертого порядка с постоянным шагом и методом Фельберга с переменным шагом. Сравнения представлены в таблице 1.

Таблица 1

Сравнение численных методов интегрирования

		Метод Рунге-Кутты	Метод Фельберга
Количество шагов	1-ый участок	374	166
	2-ой участок	544	19
	3-ий участок	424	191
	4-ый участок	292	23
Количество вычислений функции правой части	1-ый участок	1496	996
	2-ой участок	2176	114
	3-ий участок	1696	1146
	4-ый участок	1168	138
Максимальная длина шага	1-ый участок	10^{-5}	$8 \cdot 10^{-5}$
	2-ой участок	10^{-5}	$2.56 \cdot 10^{-3}$
	3-ий участок	10^{-5}	$8 \cdot 10^{-5}$

	4-ый участок	10^{-5}	$2.56 \cdot 10^{-3}$
Минимальная длина шага	1-ый участок	10^{-5}	$3.125 \cdot 10^{-7}$
	2-ой участок	10^{-5}	$8 \cdot 10^{-5}$
	3-ий участок	10^{-5}	$1.56 \cdot 10^{-7}$
	4-ый участок	10^{-5}	10^{-5}

Из таблицы видно, что количество вычислений при использовании метода Рунге – Кутты значительно выше, чем при использовании метода Фельберга. Так, общее количество вычислений функции правой части методом Рунге – Кутты 6536, что в 2.73 раза больше, чем методом Фельберга.

Наибольшая длина шага при использовании метода Фельберга наблюдается на втором и третьем участке, что также видно и из рисунка. Такой шаг достигается за счет того, что на этих участках изменение искомых функций незначительно и близко к линейному. Наименьшая длина шага наблюдалась на переходах от одного участка цикла рабочего процесса к другому.

Таким образом, было проведено исследование применимости различных численных алгоритмов к решению математической модели рабочего процесса ИТВМ. Использование метода Фельберга с переменным шагом и оценкой погрешности на основе разности решений, полученных формулами разного порядка точности с одним и тем же шагом, позволяет как значительно уменьшить количество вычислений, так и увеличить точность получаемого решения.

Работа поддержана грантом РФФИ № 11-07-00580-а.

Список литературы

1. Арушанян О. Б., Залеткин С. Ф. Решение задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений одношаговыми разностными методами: практикум на ЭВМ по вычислительным методам. – М.: МГУ, 2002. – 51 с.
2. Баженов С.П. Бесступенчатые передачи тяговых и транспортных машин: Учеб. пособие. – Липецк: Изд-во ЛГТУ, 2003. – 81 с.
3. Баженов С.П., Галкин А.В., Дедяев М.И. Характеристики выпрямителя момента инерционного трансформатора городского автобуса // 16-ая Всероссийская научно-техническая конференция «Проблемы и достижения автотранспортного комплекса». Материалы. – Екатеринбург, 2008. – С. 32-34.
4. Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы. – М.: Наука, 1987. – 630 с.
5. Леонов А.И. Инерционные автоматические трансформаторы вращающего момента. – М.: Машиностроение, 1978. – 224 с.

Рецензенты:

Шмырин А.М., д.т.н., профессор кафедры прикладной информатики в экономике, Липецкий эколого-гуманитарный институт, г. Липецк.

Малыш В.Н., д.т.н., профессор, заведующий кафедрой электроники, телекоммуникаций и компьютерных технологий, Липецкий государственный педагогический университет, г. Липецк.