УДК 371.3:513

ОБУЧЕНИЕ УЧАЩИХСЯ АНАЛОГИИ В ПРОЦЕССЕ РЕШЕНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Костюченко Р.Ю., Юдина Н.А.

ФГБОУ ВПО «Омский государственный педагогический университет», Омск, Россия (644099, г. Омск, наб. Тухачевского, 14), kryu@bk.ru, natt_matt@mail.ru

В статье актуализируются целевые установки процесса обучения математике, связанные с приобщением учащихся к методологии открытия нового и усвоением основ научных методов познания. С этих позиций рассматривается возможность обучения учащихся методу аналогии на всех этапах решения геометрических задач. Для этого в кратком изложении приводятся сначала результаты анализа научно-методической литературы по ключевым понятиям темы статьи, затем, на основе выполненного анализа, устанавливаются методические связи между обучением учащихся аналогии и обучением их решению планиметрических задач. Особое внимание уделяется реализации дидактических возможностей заключительного этапа решения планиметрических задач в обучении учащихся аналогии.

Ключевые слова: аналогия, метод аналогии, обучение геометрии, геометрическая задача, процесс решения задачи, этапы решения задачи.

TEACHING LEARNERS TO ANALOGY IN THE PROCESS OF SOLVING GEOMETRIC PROBLEMS

Kostyuchenko R.Y., Yudina N.A.

Omsk State Pedagogical University, Omsk
Omsk, Russia (644099, nab. Tukhachevskogo, 14)
kryu@bk.ru, natt_matt@mail.ru

The author actualizes the target settings of the process of teaching mathematics, related to joining the learners to the methodology of the opening new and master the basics of scientific method of knowledge. From these perspectives, the author reviews the possibility of teaching learners to the analogy method on all phases of solving geometric problems. For this purpose, the author briefly shows the results of analysis of methodological literature by this article's keywords, after that, based on that analysis, the author establishes methodical relations between teaching learners to analogy and teaching them to solve planimetric problems. Emphasis is placed upon realization of didactical possibilities of the final phase of solving planimetric problems in teaching learners to analogy.

Keywords: analogy, analogy method, teaching geometry, geometric problem, process of solving a problem, phases of solving a problem.

Актуальными для теории и методики обучения математике были и остаются вопросы, связанные с методами обучения. Опыт показывает, что не только строгая логика и дедукция должны являться основополагающими научными методами в школьном обучении. Необходимо искать иные по содержанию и назначению методы. Использование в обучении такого метода научного познания, как аналогия, предполагает включенность ученика в процесс добывания знаний и, как следствие этого, более доступное, прочное и осознанное усвоение учебного материала. Последнее обеспечивает мысленный перенос определенной системы знаний и умений от известного объекта к неизвестному, включение учащихся в исследовательскую деятельность, развитие их творческого потенциала.

Следует отметить, что одним из основных видов деятельности, в котором происходит развитие ученика, является решение задач, причем в настоящее время задачи рассматриваются в качестве основного средства организации процесса обучения на всех этапах, составляющих структуру учебной деятельности: мотивационно-ориентировочном, исполнительно-операционном, контрольно-оценочном. Действительно, как отмечает В.А. Далингер, если раньше задачи в методике обучения математике «рассматривались как цель обучения, то сейчас задачи рассматриваются как средство организации учебной деятельности учащихся на всех этапах обучения математике» [2].

Исходя из обозначенных предпосылок, рассмотрим роль и место аналогии, дидактические аспекты освоения учащимися метода аналогии в процессе обучения их решению геометрических задач.

Аналогия. Анализ научной литературы по проблеме использования аналогии в процессе обучения математике позволил сделать выводы, значимые для теории и методики обучения математике. Так, определяя понятие аналогии, следует исходить из трех наиболее значимых аспектов: аналогии как понятия, выражающего отношение сходства между различными объектами или явлениями; аналогии как формы умозаключения; аналогии как метода познания. При этом первые два названных выше подхода создают основу, а третий предопределяет аналогию как метод обучения математике, который, в отличие от метода научного познания, имеет свои особенности – главным образом, это субъект-субъектные отношения и уровень общественной значимости полученных результатов. Исходя из различных качеств, в которых может выступать аналогия [3], метод аналогии в обучении математике можно определить как метод обучения, при котором обоснованно и целенаправленно реализуются следующие действия: составление и нахождение аналогов различных заданных объектов и отношений; составление задач, аналогичных заданным; перенос информации о модели на оригинал, в частности проведение рассуждений при решении задачи по аналогии с решением исходной задачи; проверка утверждений, сделанных по аналогии.

Задача и ее решение. Понятие «геометрическая задача» в контексте данной статьи не включается в логические операции и отношения, поэтому будем считать его интуитивно ясным. Термин «решение задачи» в методической литературе применяется в трех различных смыслах: план, способ, метод осуществления требования задачи; процесс осуществления требования задачи, процесс выполнения плана решения; результат выполнения плана решения. Процесс решения задачи можно рассматривать с позиции разных наук. В методике обучения математике, вслед за Д. Пойа [4], в процессе решения задачи традиционно выделяют четыре основных этапа: 1) осмысление условия задачи; 2) составление плана решения; 3) осуществление плана решения; 4) изучение найденного решения.

Первым этапом процесса решения является анализ задачи, который проводится до тех пор, пока не возникает какая-то идея о плане решения, составляющая второй этап деятельности по решению задач. Развертывание плана происходит в процессе его осуществления – третьего этапа. Осуществляя найденный план решения, необходимо убедиться, что получаемый результат есть действительно решение задачи, что требования задачи тем самым полностью выполнены. Проверка и исследование решения не представляют собой какой-то особый этап деятельности по решению задачи, они должны быть включены в третий этап. По-иному обстоит дело в отношении очень редко применяемого анализа (обсуждения, исследования) проведенного решения. Просмотреть еще раз проделанное решение, проанализировать его с точки зрения поучительности, рациональности, поискать другие способы решения – все это должно составлять четвертый этап деятельности по решению задач – этап исследования решения задачи.

Аналогия и задача. Аналогия, являясь своеобразной эвристикой, методом познания, методом открытия нового, будет иметь в таком понимании большое значение для продуктивных второго и четвертого этапов решения задачи, по сравнению с более алгоритмическими первым и третьим этапами.

При осмыслении условия задачи выполняется ряд действий, к которым можно отнести: ознакомление с описанной в задаче общей ситуацией, выявление условия и требования задачи, установление вида задачи, фиксация результатов анализа в виде рисунка и краткой записи условия и заключения задачи. Совокупность представленных действий при кажущейся стандартности далеко не очевидна учащимся и для многих школьников нередко представляет неразрешимую задачу. Поэтому необходима специальная система учебных заданий для выработки у учащихся прочных и верных умений и навыков в выполнении действий, адекватных осмыслению условия задачи. Здесь ученикам можно предложить по аналогии с образцом отделить условие, заключение в предложенной задаче, сравнить данную задачу с типовыми, составить краткую запись, по форме схожую с краткой записью разобранной задачи, и другие задания. Проведенное нами исследование показывает, что одним из направлений по формированию действий, связанных с осмыслением условия задачи, является составление аналогичных по заданному критерию задач – данное направление мы рассматриваем далее при описании методики работы на заключительном этапе решения планиметрической задачи.

Необходимым и наиболее трудным для учащихся является второй этап – составление плана решения. Констатирующий эксперимент показывает, что здесь целенаправленная деятельность учащихся по поиску способа решения нестандартной задачи (стандартные задачи решаются на основе известного алгоритма их решения) протекает, как правило, в контексте: 1) связи данной задачи с теорией и другими задачами; 2) анализа требования задачи; 3) анализа условия задачи.

Метод аналогии в явном виде присутствует в первом выделенном направлении и может быть представлен схемой, компонентами которой будут: *а*) решаемая задача; *б*) вспомогательная задача; *в*) решение вспомогательной задачи; *г*) установленный факт и/или метод вспомогательной задачи; *д*) решение исходной задачи. Тогда возможен как непосредственный переход от решаемой задачи к ее решению, так и переход, осуществляемый с использованием метода аналогии, при котором последовательно реализуются все обозначенные компоненты. Покажем последнее на примере.

Решаемая задача (а). Докажите, что сумма расстояний от любой внутренней точки O правильного тетраэдра $SABC$ до его граней постоянна.

Вспомогательная задача (б). Докажите, что сумма расстояний от любой внутренней точки O правильного треугольника ABC до его сторон постоянна.

Решение вспомогательной задачи (в). Пусть OA_1, OB_1, OC_1 – перпендикуляры к сторонам соответственно BC, AC, AB правильного треугольника ABC со стороной a. Соединим точку O с вершинами треугольника ABC, тем самым разобьем его на три треугольника OBC, OAC и OAB, тогда сумма площадей этих треугольников есть величина постоянная, равная площади треугольника ABC: $S\Delta OBC + S\Delta OAC + S\Delta OAB = S\Delta ABC$. Откуда получаем: $\frac{1}{2} BC \cdot OA_1 + \frac{1}{2} AC \cdot OB_1 + \frac{1}{2} AB \cdot OC_1 = S\Delta ABC$; $\frac{1}{2} a \cdot OA_1 + \frac{1}{2} a \cdot OB_1 + \frac{1}{2} a \cdot OC_1 = S\Delta ABC$; $\frac{1}{2} a \cdot (OA_1 + OB_1 + OC_1) = a^2\sqrt{3}/4$; $OA_1 + OB_1 + OC_1 = a\sqrt{3}/2$.

Метод вспомогательной задачи (г). Для доказательства мы использовали метод площадей, суть которого состоит в выражении площади одной и той же фигуры разными способами с последующим нахождением искомой величины с помощью алгебраических преобразований.

Решение исходной задачи (д). Рассуждая аналогично, правильный тетраэдр $SABC$ с помощью произвольной внутренней точки O можно разбить на четыре тетраэдра, сумма объемов которых равна объему данного тетраэдра. Тогда, составив аналогичное вспомогательной задаче равенство и выполнив аналогичные преобразования, получим искомое доказательство.

Второе направление поиска плана решения – анализ требования задачи – предполагает выяснение возможных путей ответа на вопрос задачи и чаще всего представляет собой восходящий или нисходящий анализ.

Третье направление поиска плана решения – анализ условия задачи – обуславливает использование эвристических схем решения задачи: решение более общей задачи и перенесение ее результата на исходную задачу; решение частной задачи, прием рассмотрения предельного случая; метод разбиения задачи на подзадачи; метод преобразования задачи; метод моделирования; метод введения вспомогательных элементов [5; 6]. Отметим, что и здесь метод аналогии имеет место в неявном, опосредованном виде при осуществлении аналитико-синтетической деятельности и реализации эвристических схем.

Возвращаясь к этапам решения задачи, следует отметить, что в реальном учебном процессе деятельность учащегося по решению задачи носит непрерывный характер; поэтапное же рассмотрение этого процесса удобно для теоретических обобщений и изысканий. В плане применения метода аналогии на третьем этапе решения задачи – осуществлении плана решения – можно выделить различные его проявления: аналогия в оформлении решения задач; аналогия в построении силлогизмов при записи решения или доказательства; аналогия между схематической записью плана решения и окончательным оформлением решения и др. Здесь можно и следует говорить о воспитании культуры математической речи, о воспитании алгоритмической культуры. Однако в контексте реализации развивающих функций задач особое значение приобретает четвертый – заключительный этап решения задачи.

Заключительный этап, являясь частью процесса решения задачи, реализует все функции задач в обучении математике, однако в силу его особенностей отдельные функции проявляются наиболее отчетливо или с некоторой спецификой, а именно: деятельность учащихся на заключительном этапе решения планиметрической задачи вооружает школьников приемами работы по использованию методов научного познания, способствует осознанию основного приема поиска решения задачи, позволяет активизировать процесс развития творческого мышления учащихся, является одним из показателей осознанности усвоенных знаний. Существующие исследования по использованию заключительного этапа решения задачи при обучении математике (Н.А. Зеленина, Т.А. Иванова, Д.Ф. Изаак, Е.О. Канин, Ю.М. Колягин, Ф.Ф. Нагибин, Д. Пойа, Г.И. Саранцев, З.А. Скопец, Л.М. Фридман, А.Я. Цукарь и др.) достаточно разноаспектны, однако можно выделить общий для них тезис: заключительный этап работы с задачей является необходимой и существенной частью решения и содержит в себе значительный потенциал для обучения, развития и воспитания учащихся, совершенствования процесса обучения математике.

Как показал проведенный нами педагогический эксперимент, структура данного этапа может определяться видами аналогий и деятельностью учащихся по их применению. Тогда многообразие видов деятельности, осуществляемой учащимися на заключительном этапе решения планиметрических задач, можно систематизировать и выделить соответственно три составляющие: 1) исследование задачи и хода решения (деятельность учащихся осуществляется в соответствии с видами аналогии, выделенными на основе видов сходства, которое в математике часто обозначают термином «тождество»); 2) формулирование и решение задач, порожденных данной (деятельность учащихся осуществляется в соответствии с аналогией, в основе которой лежит начальное или конечное состояние задачи); 3) поиск новых способов решения задачи (деятельность учащихся осуществляется в соответствии с аналогией, в основе которой лежит базис решения или само решение задачи).

Комплекс планиметрических заданий, используемый для организации процесса обучения учащихся аналогии на заключительном этапе решения планиметрических задач, предполагает задания различных видов: задания, направленные на исследование задачи и хода ее решения, которые реализуют различные виды аналогий: применения, обобщения, контакта, предельную, преобразований, тривиальную [1] и аналогию противоположностей; задания, направленные на формулирование и решение задач, порожденных разобранной, а также задания, направленные на поиск и осуществление новых способов решения, которые реализуют аналогию в структуре планиметрической задачи.

Обучать учащихся методу аналогии на заключительном этапе решения планиметрических задач следует поэтапно. Здесь можно выделить три взаимосвязанных этапа.

1. Ознакомление учащихся с аналогией как методом научного познания, выявление особенностей умозаключений, сделанных по аналогии. Установление аналогий будет идти успешнее, если у учащихся будет сформировано умение проводить сравнение. Сравнение позволяет сформировать у школьников умение находить сходства и различия понятий, процессов, явлений, объектов, что ускоряет процесс нахождения и составления аналогов различных заданных объектов и отношений. В зависимости от способа осуществления сравнения различают последовательные, параллельные и отсроченные сравнения, поэтому формы организации деятельности учащихся по ознакомлению с аналогией в процессе решения задач могут быть следующими: *а*) аналогичные задачи необходимо предъявлять учащимся последовательно по одной, при этом сравнение объектов, входящих в задачи, происходит после того, как пара задач решена; *б*) необходимо одновременное, совместное предъявление учащимся пар задач, в которых рассматриваются одинаковые или аналогичные объекты в условии и/или заключении задачи; *в*) специфика предъявления задач при отсроченном сравнении объектов состоит в том, что сравниваемые объекты (или методы решения) значительно удалены друг от друга во времени, поэтому задача учителя – актуализировать свойства изучаемого ранее объекта, а также ранее изученные методы решения для дальнейшего эффективного сравнения и установления аналогии с изучаемым объектом или методом решения.

2. Применение учащимися различных видов аналогии для работы на заключительном этапе решения задачи по геометрии. Для эффективной организации деятельности учащихся необходимо на заключительном этапе решения планиметрических задач применять задания, реализующие различные виды аналогии, при этом необходимо учитывать оптимальное сочетание индивидуальной и групповой работы учащихся.

3. Организация осознанного применения учащимися метода аналогии на заключительном этапе решения планиметрической задачи. Деятельность учащихся на данном этапе состоит в составлении задач самими учащимися и переносе метода решения исходной задачи на вновь составленную, при этом большую роль играет индивидуальная работа учащихся, которая может быть организована в двух направлениях. С одной стороны, решенная задача порождает новую задачу, поэтому заключительный этап решения задачи можно представлять как серию задач, составляющих единое целое, так как в нем рассматривается общая проблема, которая реализуется в различных частных случаях. С другой стороны, задача, имеющая несколько методов решения, порождает новые методы решения аналогичной задачи.

Приведем пример. Для этого напомним формулировку планиметрической задачи, решение которой мы привели выше: «Докажите, что сумма расстояний от любой внутренней точки O правильного треугольника ABC до его сторон постоянна». Анализируя факт, полученный в ее решении, а именно $\left(OA_1 + OB_1 + OC_1\right) = a\sqrt{3}/2$, можно заметить, что выражение, стоящее в правой части равенства, есть мера высоты равностороннего треугольника. Данное обстоятельство может послужить для формулировки такой задачи: «Докажите, что сумма расстояний от любой внутренней точки правильного треугольника до его сторон равна высоте этого треугольника». Аналогия треугольника с тетраэдром позволит сформулировать и такую задачу: «Докажите, что сумма расстояний от любой внутренней точки правильного тетраэдра до его граней равна высоте этого тетраэдра». Рассматривая частный случай расположения точки O в треугольнике – ее принадлежность какой-либо стороне, возможно получить и такую задачу: «Докажите, что сумма расстояний от всякой точки, лежащей на стороне равностороннего треугольника, до его двух других сторон постоянна и равна его высоте». Аналогия правильного треугольника квадрату (правильные многоугольники) влечет изменение основной фигуры в условии задачи при схожести заключения, что обуславливает новую серию задач и т.д. Однако здесь надо быть внимательным, поскольку аналогия дает лишь гипотетические умозаключения, которые не всегда верны.

В заключение подчеркнем еще раз, что проблема, рассматриваемая в статье, определяется необходимостью разрешения противоречия между востребованностью обучения учащихся эвристическим приемам и методам научного познания, творческой деятельности и недостаточной разработанностью методических основ использования аналогии как метода научного познания при обучении геометрии. На наш взгляд, научно обоснованная дидактическая адаптация метода научного познания аналогии ко всем этапам решения планиметрической задачи, в частности при поиске плана решения и/или на заключительном этапе решения, внесет существенный вклад в разрешение данной проблемы.

Список литературы

1. Беляев Е.А., Киселева Н.А., Перминов В.Я. Некоторые особенности развития математического знания. – М. : Изд-во МГУ, 1975. – 112 с.
2. Далингер В.А. Методика обучения учащихся стереометрии посредством решения задач. – Омск : Изд-во ОмГПУ, 2001. – 365 с.
3. Далингер В.А., Костюченко Р.Ю. Аналогия в геометрии. – Омск : Изд-во ОмГПУ, 2001. – 149 с.
4. Пойа Д. Как решать задачу. – М. : Учпедгиз, 1959. – 208 с.
5. Саранцев Г.И. Методика обучения математике в средней школе. – М. : Просвещение, 2002. – 224 с.
6. Фридман Л.М. Теоретические основы методики обучения математике. – М. : Флинта, 1998. – 224 с.

Рецензенты:

Брейтигам Э.К., д.п.н., профессор кафедры алгебры и методики обучения математике ФГБОУ ВПО «Алтайская государственная педагогическая академия», г. Барнаул.

Липатникова И.Г., д.п.н., профессор, зав. кафедрой теории и методики обучения математике ФГБОУ ВПО «Уральский государственный педагогический университет», г. Екатеринбург.