

## РИМАНОВЫ ВОЛНЫ В ДИНАМИКЕ ОПОЛЗНЕЙ НАД ПЛОСКИМ ОТКОСОМ

Петрухин Н.С.<sup>1)</sup>, Пелиновский Е.Н.<sup>1,2)</sup>

1) *Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики, Нижегородский филиал, Нижний Новгород, Россия (603014, г. Нижний Новгород, Сормовское шоссе, 30), e-mail: npetruhin@hse.ru*

2) *Институт прикладной физики РАН(603950, г. Нижний Новгород, ул. Ульянова,46)*

Нелинейная динамика оползней, спускающихся со склонов гор, исследуется в рамках так называемых «жидких» моделей идеального и вязкого слоев жидкости малой толщины (приближение мелкой воды). Сила трения оползня об подстилающую поверхность описывается законом сухого трения (Кулона). В общем случае основные уравнения движения являются гиперболическими, что позволяет использовать классический аппарат современной теории волн. В рамках этих моделей получены строгие аналитические решения в виде Римановых волн, описывающих эволюцию нелинейных возмущений в обе стороны от центра оползня. Если в рамках «идеальной» модели скорость частиц в потоке определяется в явном виде через локальную глубину потока, то в рамках «вязкой» модели скорость потока связана с глубиной потока интегральным соотношением. Скорость деформации переднего фронта оползня оказывается разной в идеальной и вязкой жидкости, она выше в случае потока с однородным распределением скорости по высоте. В тоже время скорость деформации вершины оползня практически одинакова в обеих моделях.

Ключевые слова: нелинейные гиперболические уравнения, Римановы инварианты, Римановы волны, нелинейная динамика оползней.

## RIEMANN WAVES IN THE DYNAMICS OF THE LANDSLIDES ABOVE PLANE SLOPE

Petrukhin N.S.<sup>1)</sup>, Pelinovsky E.N.<sup>2)</sup>

1) *National Research University Higher School of Economics, City of Nizhny Novgorod (603014, Nizhny Novgorod, Sormovskoe Shosse, 46) , npetruhin@hse.ru*

2) *Institute of Applied Physics RAS (603950, Nizhny Novgorod, Ulyanova st. 46)*

Nonlinear dynamics of the landslides moved from the mountain slope is studied in the framework of co-called “fluid” models of ideal and viscous layers of weak thickness (shallow-water approximation). Friction is described by the Coulomb (“dry”) law. In general, the basic equations are hyperbolic equations allowing using the classic approaches of the modern wave theory. Rigorous analytical solutions – Riemann waves described the evolution of the nonlinear perturbations in opposite directions from the landslide centre are obtained within both models. The particle velocity in the ideal flow is determined via the landslide height, meanwhile in the viscous flow the particle velocity is determined by the integral expression from the landslide height. The speed of front deformation is different in ideal and viscous fluids; it is higher for a flow with uniform vertical distribution of velocity. At the same time, the speed of landslide top deformation is almost the same in both models.

Keywords: nonlinear hyperbolic equations, Riemann invariants, Riemann waves, nonlinear dynamic of landslides.

### 1. Введение

Известен ряд случаев, когда относительно слабое землетрясение инициировало движение больших подводных оползней, которые действуя как поршень, приводят к генерации морских волн (см., например, [8]). В ряде работ разработаны аналитические теории генерации волн цунами движущимися подводными оползнями (соответствующие ссылки можно найти в [2]). Однако во всех этих работах предполагалась, что характеристики оползня не меняются со временем. Между тем, как следует из результатов

численного моделирования, динамика самого подводного оползня является достаточно сложной [8].

Следует отметить, что оползни бывают не только подводными. Известны многочисленные случаи схода оползней и лавин со склонов гор, приводящие к многочисленным жертвам. Отметим и региональный характер оползневой опасности для Нижегородской области. Так, еще в 1597 году Печерский монастырь сошел в реку Волга в районе Нижнего Новгорода. Вот как кратко описано в летописи (цитируем по [1]): «*В 1597 году, 18 июня, разразился над Нижним Новгородом гнев Божий: оторвавшись от матерой земли оползла гора в Печерском монастыре и с растущим на ней лесом вдвинулась в Волгу сажень на 50, а местами и более, вследствие чего на реке поднялось страшное волнение: стоявшие на воде под монастырем суда выбросило на берег сажень в 20 от воды и более*». Из исторического описания можно сделать вывод, что источником оползня стало повышение уровня грунтовых вод, приведшее к разжижению грунта. При этом, оползень вызвал большие волны в Волге. Это речное цунами промоделировано в [1]. Оползневая опасность берегов Волги и Оки в районе Нижнего Новгорода высока и в настоящее время. Так, по данным Комитета охраны природы и управления природопользованием Нижегородской области, только за 2000 год в Нижнем Новгороде на участках оползневых склонов этих рек образовались три новых оползня и активизировались 33 старых. Последний значительный оползень произошел 9 ноября 2004 года в Богородском районе Нижегородской области. С высокого берега реки Ока, с высоты примерно 50 м обрушился грунт объемом около 10 тысяч кубометров. Обследование этого события показало, что оползень остановился, не доходя до воды, и не возбудил цунами. Отметим недавнюю работу [5], посвященную устойчивости склонов Горьковского водохранилища, в которой выявлены береговые участки слабой устойчивости, где возможен сход оползней.

Настоящая работа посвящена исследованию нелинейной динамики оползней, сходящих с крутых склонов в рамках двух различных моделей, аппроксимирующих поля течений в оползне. В первой модели предполагается, что поток однороден по высоте, как в идеальной жидкости. Это приближение называется моделью Саваге – Хутера [3,9]. Во втором случае предполагается параболический профиль течения по высоте, подобный течению вязкого слоя жидкости [6–7].

## 2. Римановы волны в модели Саваге – Хутера

Основные уравнения оползневого потока с однородной вертикальной структурой, движущегося под действием силы тяжести и Кулоновского трения (модель Саваге – Хутера) в системе координат, привязанной к топографии откоса, имеют вид

$$\frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + h \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \cos \theta \frac{\partial h}{\partial x} = g \alpha \quad (1)$$

где  $h$  – высота потока,  $u$  – средняя по высоте скорость потока,  $g$  – ускорение силы тяжести,  $\theta$  – угол наклона поверхности скольжения,  $\mu = tg(\varphi)$  – коэффициент кулоновского трения,  $\varphi$  – динамический угол трения и  $\alpha = \sin\theta - \mu\sin\theta$ . Величина  $\varphi$  зависит от материала оползня, в частности, для лавин, сходящих с вулканов, она оценивается в  $17-35^\circ$ . Данные уравнения отличаются от известных уравнений мелкой воды только диссипативным членом, который для воды обычно принимается в виде квадратичного трения. В дальнейшем наклон откоса предполагается постоянным и достаточным для начала движения потока ( $\theta > \varphi$ ).

Система уравнений (1) гиперболическая с постоянными коэффициентами, поэтому многие ее решения могут быть получены стандартным путем. В частности, Римановы инварианты находятся явно

$$I_{\pm} = u \pm 2\sqrt{\frac{m+1}{m}gh \cos \theta - \alpha g t}, \quad (2)$$

что позволяет переписать уравнения (1) в виде

$$\frac{\partial I_{\pm}}{\partial t} + c_{\pm} \frac{\partial I_{\pm}}{\partial x} = 0, \quad c_{\pm} = \frac{3m+2}{4(m+1)}I_{\pm} + \frac{m+2}{4(m+1)}I_{\mp} + \alpha g t. \quad (3)$$

Система уравнений типа (3) изучалась в теории волн на воде [4], где, однако, кулоновское трение не рассматривалось, и наклон дна предполагался малым. Отличается и постановка задачи: в волнах на воде начальные условия соответствуют слабо-нелинейным волнам, в то время как в гравитационных потоках нелинейность всегда сильная. Тем не менее, математическая аналогия между «водными» и «потоковыми» уравнениями позволяет опустить некоторые выкладки и привести здесь часть результатов без вывода.

Решения в виде Римановых волн уже находились в литературе [3]. Они легко переписываются для потоков с учетом кулоновского трения. Риманова волна имеет следующий вид

$$\Gamma(x,t) = \Gamma_0 \left( x - \frac{\alpha g t^2}{2} - \Gamma t \right), \quad \Gamma = \frac{3m+2}{\sqrt{m(m+1)}} \sqrt{gh \cos \theta}, \quad u = 2\sqrt{\frac{m+1}{m}gh \cos \theta} + \alpha g t. \quad (4)$$

Это решение имеет ясный физический смысл: оползень скатывается вниз под действием редуцированной силы тяжести и укручается на фронте (рис. 1).

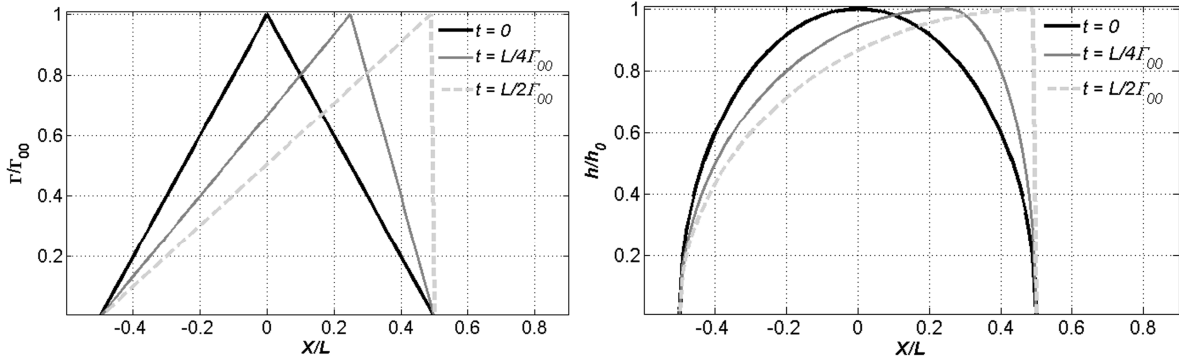


Рис. 1. Профили Римановой волны скорости (слева) и уровня (справа) в различные моменты времени,  $T_{br}$  – время обрушения

За конечное время фронт оползня становится вертикальным и начинает обрушаться. Время обрушения легко находится

$$T_{br} = \frac{L\sqrt{m(m+1)}}{2(3m+2)\sqrt{gh_0 \cos \theta}}, \quad (5)$$

и оно зависит от высоты оползня и угла наклона откоса к горизонту. После обрушения это решение формально не работает, и обрушенная область должна заменяться скачком. Мы не будем, однако, вычислять амплитуду скачка, так как нашей главной целью является нахождение аналитических решений, которые для оползней с обрушенным фронтом не находятся в явном виде.

#### 4. Римановы волны в вязкой модели оползня

В модели вязкого оползня профиль скорости по высоте не является однородным. Упрощенные уравнения такой модели для осредненного по высоте потока выведены в [6–7].

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x}(Hu) = 0, \quad (6)$$

$$\frac{2}{3} \left[ \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{5} \frac{u}{H} \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{4}{5} H \frac{\partial u}{\partial x} \right] + g \frac{\partial H}{\partial x} = g\theta - \frac{2\mu u}{H^2}. \quad (7)$$

Эти уравнения сильно отличаются от приведенных выше уравнений модели Саваге – Хутера. В частности, скорость  $u$  является теперь скоростью частиц на поверхности оползня. Появились численные коэффициенты, которые, как мы покажем, оказывают существенное влияние на характер решения. Кроме того, сила трения зависит от скорости и высоты потока ( $\mu$  = коэффициент трения).

Для поиска аналитического решения сначала пренебрежем силой трения ( $\mu = 0$ ). Тогда уравнение (7) легко преобразовать к виду

$$\frac{\partial}{\partial t}(Hu) + \frac{12}{15} \frac{\partial}{\partial x}(Hu^2) + \frac{3}{2} gH \frac{\partial H}{\partial x} = \frac{3}{2} g\theta H. \quad (8)$$

Вводим расход оползневого материала по поперечному сечению

$$M = \frac{2}{3} Hu. \quad (9)$$

Численный коэффициент здесь возник из-за неоднородности скорости потока по высоте. Средняя скорость потока в таком течении есть  $2u/3$ , так что выражение для расхода примет привычную форму. В результате система уравнений (6) – (8) принимает окончательный вид

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial M}{\partial x} = 0, \quad (10)$$

$$\frac{\partial M}{\partial t} + \frac{6}{5} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{M^2}{H} \right) + gH \frac{\partial H}{\partial x} = g\theta H. \quad (11)$$

Эти уравнения отличаются от уравнений модели Саваге – Хутера только численным коэффициентом  $6/5$  вместо 1.

Примем во внимание, что в зависимости от гипотез, заложенных в теории вязкого подслоя, профиль течения может иметь более сложную форму. Поэтому мы заменим уравнение (11) на более общее

$$\frac{\partial M}{\partial t} + \alpha \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{M^2}{H} \right) + gH \frac{\partial H}{\partial x} = g\theta H \quad (12)$$

с произвольным численным коэффициентом  $\alpha$ . Для идеальной жидкости  $\alpha = 1$ , а для вязкого потока  $\alpha = 6/5$ . Система (10) – (12) является гиперболической, однако Римановы волны в ее рамках еще не исследовались. В качестве первого приближения мы будем считать наклон откоса малым и пренебрежем правой частью в (12).

Для нахождения Римановых волн положим

$$M = M(H) \quad (13)$$

После подстановки система (10)-(12) будет представлять собой однородную линейную систему относительно первых производных от глубины. В этом случае определитель системы должен обращаться в нуль, что и ведет к обыкновенному дифференциальному уравнению для  $M(H)$

$$\left(\frac{dM}{dH}\right)^2 = \frac{2\alpha M}{H} \frac{dM}{dH} - \frac{\alpha M^2}{H^2} + gH. \quad (14)$$

Удобно снова вернуться к усредненной по потоку скорости  $U=M/H$

$$H^2 \left(\frac{dU}{dH}\right)^2 = 2(\alpha - 1)H U H + (\alpha - 1)U^2 + gH. \quad (15)$$

Аналитические решения в случае  $\alpha = 1$  находятся тривиально, это случай, описанный в предыдущем параграфе. В общем же случае не удастся найти решение уравнения (15) в явном виде. Для численного интегрирования удобно использовать безразмерные переменные

$$D = \frac{H}{h}, \quad V = \frac{U}{\sqrt{gh}}, \quad (16)$$

где  $h$  – невозмущенная глубина потока. В результате, уравнение (15) записывается в виде

$$D^2 \left(\frac{dV}{dD}\right)^2 = 2(\alpha - 1)DV \frac{dV}{dD} + (\alpha - 1)V^2 + D. \quad (17)$$

Это уравнение должно быть решено для следующего начального условия

$$V(D=1) = 0, \quad (18)$$

означающего, что вне оползня частицы не двигаются. Поскольку уравнение (17) содержит квадрат производной, оно описывает обе волны, распространяющиеся в противоположных направлениях. Мы ограничимся анализом только одной волны и упростим уравнение (17)

$$\frac{dV}{dD} = \sqrt{\frac{1}{D} + \alpha(\alpha - 1)\frac{V^2}{D^2}} + (\alpha - 1)\frac{V}{D}. \quad (19)$$

В случае идеального потока решение уравнения (19) находится в явном виде

$$V = 2[\sqrt{D} - 1]. \quad (20)$$

Для вязкого потока удастся найти асимптотическое решение (19) в случае малой нелинейности ( $D = 1 + d, d \ll 1$ )

$$V \approx d \left[ 1 + \frac{\alpha - 3/2}{2} d \right], \quad (21)$$

следовательно, нелинейная поправка к скорости зависит от параметра  $\alpha$ . Численное решение уравнения (19) представлено на рис. 2 (показаны решения как для прямой, так и для обратной волн). Как видим, разница между кривыми для идеального и вязкого потока незначительна, и она проявляется главным образом на нулевой глубине (на фронте потока). Однако здесь скорость вязкого потока сильно возрастает и приводит к обрушению фронта. С другой стороны, на фронте трудно ожидать стационарного параболического профиля потока, так что динамикой частиц на нулевой глубине можно пренебречь. В тоже время, если поток достаточно мощный, то скорость частиц на вершине в вязкой модели оказывается выше, чем в идеальном потоке. В этом случае нелинейная динамика возмущений в потоке будет развиваться быстрее.

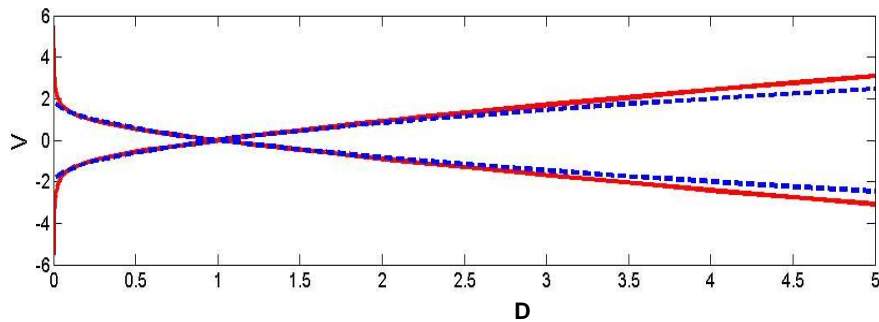


Рис. 2. Зависимость скорости частиц от высоты потока. Голубая линия соответствует идеальному потоку, красная – вязкому

Зная скорость частиц, можно получить уравнение Римановой волны из (19)-(12)

$$\frac{\partial P}{\partial t} + w(H) \frac{\partial H}{\partial x} = 0, \quad (22)$$

где характеристическая скорость есть

$$w = \frac{dM}{dH} = \sqrt{ghW(H)}, \quad (23)$$

и

$$W(H) = \pm \sqrt{H + \alpha(\alpha - 1)V^2} + \alpha V. \quad (24)$$

Уравнение (23) совместно с (19) проинтегрировано численно, и характеристическая скорость показана на рис. 3. И здесь имеется особенность на фронте потока, которая не имеет физического смысла. На вершине же потока характеристическая скорость оказывается выше в вязкой модели, чем в идеальной.

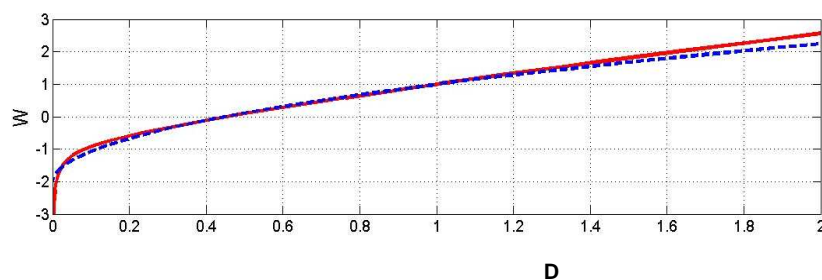


Рис. 3. Зависимость характеристической скорости от глубины потока. Голубая линия соответствует идеальному потоку, красная – вязкому.

#### 4. Заключение

В работе получены аналитические решения уравнений движения оползней в виде Римановой волны в рамках различных моделей. Показано, что если динамика оползня описывается моделью вязкого слоя, то нелинейные эффекты развиваются быстрее на гребне оползня.

Работа выполнена при финансовой поддержке регионального гранта РФФИ № 11-05-97006.

#### Литература

1. Диденкулова И.И., Зайцев А.И., Красильщиков А.А., Куркин А.А., Пелиновский Е.Н., Ялчинер А.Ш. Нижегородское цунами 1597 года на реке Волга // Известия АИН РФ, Серия: Прикладная математика и механика. – 2003. – Т. 4. – С. 170–180.
2. Диденкулова И.И., Николкина И.Ф., Пелиновский Е.Н. Резонансное усиление волн цунами при сходе подводного оползня. // ДАН. – 2011. – Т. 436, № 1. – С. 114–117.
3. Николкина И.Ф., Пелиновский Е.Н., Талипова Т.Г. Нелинейная динамика гравитационных потоков в наклоненных каналах // ДАН. – 2010. – Т. 432, № 5. – С. 689–692.
4. Пелиновский Е.Н. Гидродинамика волн цунами. Нижний Новгород: ИПФ РАН, 1996. – 275 с.
5. Хвостова О.Е. Оценка запаса устойчивости склонов береговой линии Горьковского водохранилища // Труды Нижегородского гос. технического университета. – 2010. – Вып. 4. – С. 50–61.
6. Fine I., Rabinovich A., Thomson R., Kulikov E. Numerical modeling of tsunami generation by submarine and subaerial landslides // In: Yalciner A., Pelinovsky E., Okal E., Synolakis C. (Eds). Submarine landslides and tsunamis / Kluwer. – 2003. – P. 69–88.
7. Jiang L. LeBlond P. The coupling of a submarine slide and the surface waves which it generates // J. Geophys. Research. – 1992. – Vol. 97, № C8. – P. 12731–12744.
8. Yalciner A., Pelinovsky E., Okal E., Synolakis C. (Eds). Submarine landslides and tsunamis / Kluwer, 2003.
9. Zahibo, N., Pelinovsky, E., Talipova, T., and Nikolkina, I. The Savage-Hutter model for the avalanche dynamics in inclined channels: analytical solutions // J. Geophys. Res. – 2010. – Vol. 115, B03402. – doi:10.1029/2009JB006515.

#### Рецензенты:

Галкин В.М., д.ф.-м.н., профессор, зав. кафедрой «Высшая математика» Нижегородского государственного технического университета им. Р.Е. Алексева, г. Нижний Новгород.

Максимов В.В., д.т.н., профессор, ФГБОУ ВПО «Санкт-Петербургский государственный университет технологии и дизайна», г. Санкт-Петербург.