

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛОЙ КОНВЕКЦИИ

Закинян Р.Г., Сухов С.А., Ларченко И.Н.

*ФГБОУ ВПО Ставропольский государственный университет, Ставрополь
Ставрополь, Россия (355009, г. Ставрополь, ул. Пушкина, 1) stavs@stavs.ru*

В работе обсуждаются естественная конвекция или конвекция Рэлея – Бенара, течения, поддерживаемые неоднородным нагревом по горизонтали (циркуляция Хэдли), и возможность их объединения в общую конвективную модель Рэлея – Хэдли. Приводится система нелинейных дифференциальных уравнений в приближении Обербека – Буссинеска, описывающая двумерную конвекцию в замкнутой полости в присутствии горизонтального и вертикального градиентов температуры. Система записана в безразмерных переменных «вихрь, функция тока, температура, возмущение температуры». В качестве управляющих параметров, определяющих режимы конвекции, выбраны: число Рэлея, число Прандтля, число Хэдли. Применен конечно-разностный численный метод для решения системы. Получены картины предельных стационарных режимов при различных числах Рэлея. Исследованы интегральные характеристики (число Нуссельта) в зависимости от числа Рэлея. Приведена степенная зависимость числа Нуссельта от числа Рэлея.

Ключевые слова: свободная конвекция, число Рэлея, циркуляция Хэдли, число Нуссельта, вихрь.

MATHEMATICAL MODELING OF THERMAL CONVECTION

Zakinyan R.G., Sukhov S.A., Larchenko I.N.

*The Stavropol State University, Stavropol
Stavropol, Russia (355009, Stavropol, Pushkin street, 1) stavs@stavs.ru*

Free convection, or Benard-Rayleigh convection, flows maintained by horizontal non-homogeneous heating (Hadley circulation) and capability to combine them into general Rayleigh – Hadley convection model are described in the article. The system of nonlinear differential equations for the Oberbec – Boussinesq approximation that describes the two-dimensional convection in a closed domain in the presence of horizontal and vertical temperature gradients is represented in the paper. The system had been written with the non-dimensional variables «curl, stream function, temperature, temperature disturbance». As the governing parameters characterizing convection states Rayleigh number, Prandtl number, Hadley number are picked. The finite-difference numerical method is used to solve the system. The marginal steady-state conditions patterns are obtained for different Rayleigh numbers. Integral characteristics (Nusselt number) had been investigated subject to Rayleigh number. The power law of the Nusselt number on the Rayleigh number had been presented here.

Key words: free convection, Rayleigh number, Hadley circulation, Nusselt number, curl.

Введение. В гидродинамике в основном исследуются два вида конвекции. Каждый из них представляет собой атмосферный феномен, который обычно наблюдается в широких пространственных и временных масштабах. Первый возникает, когда вязкая среда нагревается снизу; как только амплитуда нагрева превышает некоторое критическое значение, среда самоорганизуется в систему отдельно вращающихся вихрей (конвекционных ячеек) [2, 5]. Это естественная конвекция или конвекция Рэлея – Бенара. Примером такой конвекции может служить образование облаков, находящихся на вершине пограничного слоя атмосферы (1–1.5 км), в виде «облачных улиц» или пчелиных сот.

Второй тип конвекции возникает благодаря нагреву по горизонтали. В лабораторном эксперименте, в котором одна стенка вращающегося кольцевого канала нагревается, в то время как другая стена охлаждается, развивается двумерная ячейка в радиально-вертикальной плоскости [6, 7]. Прототипом такого течения является циркуляция Хэдли [3], наблюдаемая в северном и южном полушариях в поясе от экватора до 20°–30° широты. Таким образом, можно назвать движения, поддерживаемые неоднородным

нагревом по горизонтали, конвекцией Хэдли. Две разновидности конвекции могут рассматриваться как частные случаи конвекции Рэлея – Хэдли (например, бризовая циркуляция), т.е. движения в средах, в которых существенны градиенты температуры, как по горизонтали, так и по вертикали. В любой физической системе ни решения Рэлея, ни решения Хэдли в чистом виде не могут наблюдаться, потому что, по крайней мере, малые температурные градиенты всегда присутствуют в обоих направлениях.

В настоящей статье проводится численное исследование нелинейной модели двумерной неглубокой конвекции в форме Обербека – Буссинеска, которая реагирует на нагрев, как по горизонтали, так и по вертикали.

Целью работы является исследование влияния горизонтального градиента температуры на устойчивость и форму конвективных ячеек в жидкости.

Рассмотрим безразмерную ограниченную область $D = \{(x, z), 0 \leq x \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$ с аспектным отношением $A=1$. Для численного решения предпочтительно ввести переменную $\Omega = -\Delta\psi$ (Ω имеет смысл проекции вихря скорости на направление, перпендикулярное плоскости движения) и добавить возмущение температуры в безразмерном виде θ . Тогда система в безразмерных переменных «вихрь Ω – функция тока ψ – температура T – возмущение температуры θ » запишется в виде:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} = -\frac{1}{\text{Pr}} \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \Omega}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \Omega}{\partial z} \right) + \nabla^2 \Omega + \text{Ra} \frac{\partial T}{\partial x}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{\text{Pr}} \left(\nabla^2 T - \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial z} \right) \right), \quad (2)$$

$$\Omega = -\Delta\psi, \quad (3)$$

$$\theta = T - T_{top} - 1 + z - \frac{\text{Na}}{\text{Pr Ra}} x, \quad (4)$$

где $T_{top} = T_0 / \Delta_z T$ – некоторое значение безразмерной температуры на верхней горизонтальной границе при числе $\text{Na} = 0$. Здесь Ra – число Рэлея, Na – число Хэдли, Pr – число Прандтля. Безразмерные параметры Ra и Na характеризуют тепловое воздействие по вертикали и горизонтали соответственно.

На границах квадратной области заданы жесткие граничные условия: обращаются в нуль вертикальная и горизонтальная компоненты скорости, возмущения температуры. На горизонтальных и вертикальных границах заданы линейные профили температуры. Положим $\text{Ra} = |\text{Na}| / \text{Pr}$. Задав некоторое начальное распределение вихря скорости и температуры, при помощи уравнений (1) – (4) и краевых условий можно проследить за эволюцией этого начального распределения и, в частности, получить предельный стационарный режим.

Численный метод. Для численного решения задачи применим метод конечных разностей. Введем пространственно-временную сетку:

$$\begin{cases} x_i = ih, \\ z_k = kh \end{cases} \quad i, k = 0, 1, \dots, M, \quad h = \frac{1}{M},$$

$$t_n = n\tau, \quad n = 0, 1, \dots, N, \quad \tau = \frac{l}{N}$$

и обозначим $f(x_i, z_k, t_n) = f_{i,k}^n$. Заменяя производные по времени односторонними разностями, а производные по координатам – центральными, получим:

$$\begin{aligned} \Omega_{i,k}^{n+1} = \Omega_{i,k}^n + & \left\{ \Delta \Omega_{i,k}^n + \frac{\text{Ra}}{2h} (T_{i+1,k}^n - T_{i-1,k}^n) - \right. \\ & \left. - \frac{1}{4\text{Pr}h^2} \left[(\psi_{i,k+1}^n - \psi_{i,k-1}^n) (\Omega_{i+1,k}^n - \Omega_{i-1,k}^n) - (\psi_{i+1,k}^n - \psi_{i-1,k}^n) (\Omega_{i,k+1}^n - \Omega_{i,k-1}^n) \right] \right\} \tau, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\Delta \psi_{i,k}^{n+1} = -\Omega_{i,k}^{n+1}, \quad (6)$$

$$\begin{aligned} T_{i,k}^{n+1} = T_{i,k}^n + \frac{1}{\text{Pr}} \left\{ \Delta T_{i,k}^n - \frac{1}{4h^2} \left[(\psi_{i,k+1}^{n+1} - \psi_{i,k-1}^{n+1}) (T_{i+1,k}^n - T_{i-1,k}^n) - \right. \right. \\ \left. \left. - (\psi_{i+1,k}^{n+1} - \psi_{i-1,k}^{n+1}) (T_{i,k+1}^n - T_{i,k-1}^n) \right] \right\} \tau, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\theta_{i,k}^n = T_{i,k}^n - T_{\text{top}} - 1 + kh - \frac{\text{Na}}{\text{Pr Ra}} ih. \quad (8)$$

Значение вихря на стенке получается из условия Вудса второго порядка точности. Уравнение Пуассона (6) решалось итерационным методом Либмана.

Шаг по времени τ выбирался таким образом, чтобы при дальнейшем его уменьшении поля величин оставались неизменными. Основные расчеты проводились на сетке 20×20 . Вычисления на более грубой сетке 16×16 и мелкой – 40×40 показали достаточную точность полученного численного решения. При $\text{Na} = 0$ полученные поля функции тока и температуры совпали с имеющимися расчетными данными в [1] при $\text{Ra} = 5300$, $\text{Ra} = 8000$, $\text{Ra} = 60000$. Расчетные графики выполнены на сетке 40×40 .

Для поиска стационарных режимов задавалось начальное распределение вихря скорости, и затем отслеживалась его эволюция на безразмерном временном отрезке $[0;1]$. Такого промежутка было достаточно для установки предельного течения. Число Прандтля во всех расчетах принималось равным 4.0 (для воды $\text{Pr} = 4.8$). Начальное распределение температуры было выбрано в виде $\bar{T} = 2 - x - z$.

Обсуждение результатов. В ходе численных расчетов была показана однозначная зависимость направления циркуляции от знака числа Na . Задаваемое начальное распределение вихря скорости в виде локального вихря или его отсутствия $\Omega(x, z, 0) = 0$ оказалось несущественным для достижения предельного стационарного режима. Развиваясь, начальное возмущение с циркуляцией, обратной предельному стационарному режиму, меняло первоначальное направление вращения на противоположное, и после переходного процесса, продолжительность которого примерно составляла 0.2 безразмерного времени, устанавливалось предельное состояние.

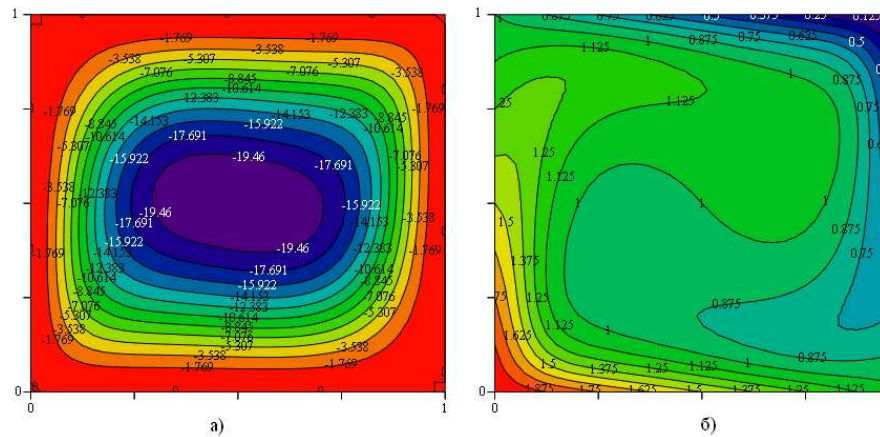


Рисунок 1. Предельный стационарный режим при $Ra=60000$, $Na<0$. Представлены изолинии а) функции тока, б) полной температуры.

С ростом числа Рэлея увеличивалась область изотермического ядра с температурой $T=1$, что объясняется конвективным перемешиванием. Об интенсивности течения можно судить по максимальным значениям функции тока (Рис 1а). Проводились исследования и в условиях колебательного режима конвекции при больших числах Рэлея. Так, при $Ra=600000$ была обнаружена система из двух интенсивно вращающихся вихрей относительно общего центра. Теплые потоки жидкости, вытесненные холодным потоком, поднимались вверх и перемещались в область пониженной температуры, где затем диссипировали.

Основной интегральной характеристикой конвективного теплообмена является среднее число Нуссельта, служащее мерой интенсивности конвективного движения. Для задачи (1) – (4) число Нуссельта в момент t^n рассчитывалось по формуле:

$$\overline{Nu}^n = -\int_0^1 T_z(x, 0, t^n) dx - \int_0^1 T_x(0, z, t^n) dz.$$

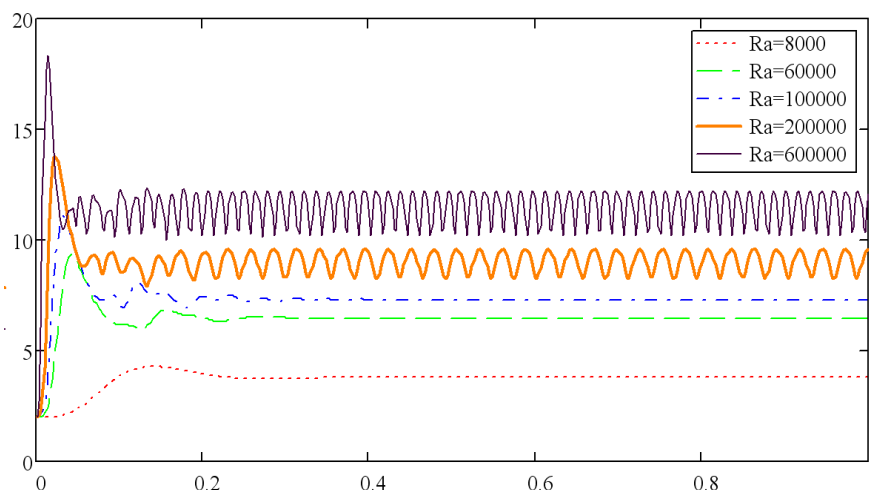


Рисунок 2. Влияние числа Рэлея на установление среднего числа Нуссельта во времени.

Для задачи (1) – (4) зависимость числа Нуссельта от числа Рэлея с графической точностью представляется формулой:

$$Nu = 0.414 \cdot Ra^{0.249} \text{ при } 5 \cdot 10^2 \leq Ra \leq 10^5 .$$

На Рис. 2 сравниваются результаты расчетов по установлению во времени среднего числа Нуссельта для различных чисел Ra . Интенсивность конвективного переноса тепла увеличивается с ростом числа Ra . При достижении $Ra \approx 2 \cdot 10^5$ наблюдается колебательный режим; при дальнейшем увеличении Ra растет частота колебаний.

Вывод. Как указано в [4], данные расчетов с жесткими граничными условиями лучше соответствует экспериментальным данным. Добавление горизонтальной неоднородности температуры вместе с жесткими граничными условиями усилило устойчивость конвективных течений, что является важным фактором их реализуемости в реальной жидкости (или атмосфере).

Таким образом, в работе численно исследована общая конвективная модель, более точно воспроизводящая наблюдаемые режимы конвекции. Показано, что неизбежно возникающие в реальной атмосфере горизонтальные градиенты существенно влияют на характер течений.

Работа выполнена в рамках реализации ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 гг. (№ 02.740.11.0739).

Список литературы

1. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. – М.: Наука, 1972. – 392 с.
2. Гетлинг А.В. Конвекция Рэлея – Бенара. Структура и динамика. – М.: Эдиаториал УРСС, 1999. – 247 с.
3. Лоренц Э.Н. Природа и теория общей циркуляции атмосферы. – Л.: Гидрометеиздат, 1970. – 259 с.
4. Палымский И.Б. Численное моделирование двумерной конвекции при высокой надкритичности // Успехи механики. – 2006. – № 4. – С. 3 – 28.
5. Chandrasekhar S. Hydrodynamic and hydromagnetic stability. Oxford: Clarendon Press, 1961. – 652 p.
6. Riehl H., Fultz D. Jet stream and long waves in a steady rotating-dishpan experiment: Structure of the circulation // Quart J. R. Met. Soc. – 1957. – № 356. – P. 215–231.
7. Riehl H., Fultz D. The general circulation in a steady rotating-dishpan experiment // Quart J. R. Met. Soc. – 1958. – № 362. – P. 389 – 417.

Рецензенты:

Диканский Ю.И., д.ф.-м.н., профессор, заведующий кафедрой общей физики ФГБОУ ВПО «Ставропольский государственный университет», г. Ставрополь.

Симоновский А.Я., д.ф.-м.н., профессор, профессор кафедры теоретической физики ФГБОУ ВПО «Ставропольский государственный университет», г. Ставрополь.