УДК 621.372.542

ОПТИМАЛЬНАЯ ОБРАБОТКА СИГНАЛОВ С ЗАТУХАНИЕМ

Пахотин В.А., Власова К.В., Кочмарский А.В.

Балтийский федеральный университет имени И. Канта, г. Калининград, Россия (236040, г. Калининград, ул. Ал. Невского, 14-а) p_ksenia@mail.ru

В настоящей работе рассматривается обработка экспоненциально затухающих сигналов на основе теории оптимального приема. Показано, что при применении метода максимального правдоподобия можно анализировать сигналы, имеющие в своей основе две составляющие. Они могут незначительно отличаться по частоте, что делает невозможным их разрешение с помощью спектрального анализа. Сделан вывод о зависимости точности оценки параметров двух сигналов от отношения сигнал/шум. Получены формулы для обнаружения, определения параметров и оценки дисперсии параметров сигналов. Результаты математических расчетов подтверждены модельными исследованиями.

Ключевые слова: экспоненциально затухающие сигналы, метод максимального правдоподобия, дисперсия параметров сигналов.

OPTIMUM PROCESSING OF SIGNALS WITH ATTENUATION

Pahotin V.A., Vlasova K.V., Kochmarsky A.V.

The Baltic federal university of a name of I.Kanta, Kaliningrad, Russia (236040, Kaliningrad, street Al. Nevskogo, 14) p_ksenia@mail.ru

In the present work processing exponents fading signals on the basis of the theory of optimum reception is considered. It is shown that at application of a method of the maximum credibility it is possible to analyze the signals having in the basis two components. They can slightly differ on frequency that does impossible their permission by means of the spectral analysis. The signal/noise is made you-waters about dependence of accuracy of an estimation of parameters of two signals on the relation. Formulas for detection, definitions of parameters and an estimation of a dispersion of parameters of signals are received. Results of mathematical calculations are confirmed by modeling researches.

Key words: exponentsfading signals, a method of the maximum credibility, a dispersion of parameters of signals.

Наряду с импульсными и непрерывными сигналами на практике часто встречаются сигналы с затуханием по экспоненциальному закону. Это, например, относится к сигналам свободной индукции, получаемых в спектрометрах ядерного магнитного резонанса (ЯМР), ядерного квадрупольного резонанса (ЯКР) /1, 2/. Для обработки такого рода сигналов, как правило, используется спектральный анализ /3/ и лишь в частных случаях метод линейного предсказания /3/, минимума дисперсии /3/, «MUSIC», /3/, которые характеризуются высоким разрешением. При использовании спектрального анализа спектр экспоненциально затухающего сигнала оказывается комплексным. Мнимая часть этого спектра определяет линию поглощения, а действительная часть спектра определяет сигнал рассеяния.

В настоящей работе рассмотрен вопрос обработки экспоненциально затухающего сигнала на основе положений теории оптимального приема /4, 5/. Она позволяет получить более точную оценку параметров сигнала по сравнению со спектральным анализом и определить возможность обнаружения слабого сигнала с оценкой отношения сигнал/шум.

Рассмотрим решение задачи обнаружения экспоненциально затухающего сигнала на основании положений теории оптимального приема. Пусть принятое сообщение имеет вид:

$$\hat{y}(t) = \hat{U}_0 e^{-\alpha t + i\omega t} + \hat{U}_ш(t), \quad (1)$$

где$\hat{U}_0$ – комплексная амплитуда сигнала;
α – коэффициент затухания сигнала;
ω – круговая частота сигнала;
$\hat{U}_ш(t)$ – аддитивный гаусовский шум со средним значением, равным нулю, дисперсией σ^2и интервалом корреляции τ_k.

Запишем функцию правдоподобия в двух случаях: при наличии сигнала в принятом сообщении$L_1(\vec{\lambda})$, где $\vec{\lambda}$– вектор параметров сигнала, и при отсутствии сигнала в принятом сообщении $L_2(\vec{\lambda})$

$$L_1(\vec{\lambda}) = const \exp\left(-\frac{1}{2\delta^2\tau_k}\int_0^\infty \left|\hat{y}(t) - \hat{U}_0 e^{-\alpha t + i\omega t}\right|^2 dt\right), \quad (2)$$

$$L_2(\vec{\lambda}) = const \exp\left(-\frac{1}{2\delta^2\tau_k}\int_0^\infty |\hat{y}(t)|^2 dt\right),$$

где$const$ – константа, несущественная для процесса обработки сигнала. Она может быть определена из условия нормировки.

Если выполняется условие

$$L_1(\vec{\lambda}) \geq L_2(\vec{\lambda}), \quad (3)$$

то в принятой реализации сигнал присутствует. Если условие (3) не выполняется, тогда сигнала в принятой реализации нет. Подставляя в (3) функции правдоподобия (2), можно получить неравенство

$$\hat{U}^* \int_0^\infty \hat{y}(t) e^{-\alpha t + i\omega t} dt \geq \frac{|\hat{U}|^2}{2}\int_0^\infty e^{-2\alpha t} dt = h_0, \quad (4)$$

где $\hat{U}^*$– комплексно сопряженная амплитуда сигнала.

Правая часть этого выражения определяет половину энергии сигнала$E = \frac{|\hat{U}_0|^2}{2\alpha}$. Она принимается в качестве порогового значения h_0. Левая часть неравенства (4) определяет структуру оптимального приемника, на выходе которого формируется функция q. Если функция q будет больше порогового значения, то сигнал в принятом сообщении присутствует. Функция q является случайной и распределена по гауссовскому закону в связи с линейными преобразованиями при обработке (4). Математическое ожидание q равно нулю при отсутствии сигнала в принятом сообщении и равно энергии сигнала при наличии сигнала в принятом сообщении. Дисперсия случайной величины q одинакова для случая отсутствия сигнала в принятой реализации и при наличии сигнала в реализации. Она определяется выражением

$$D_q = M(q^2) = \frac{|\hat{U}_0|^2\sigma^2\tau_k}{2\alpha}, \quad (5)$$

где M – оператор математического ожидания.

Среднее значение и дисперсия случайной величины q позволяет записать выражения для плотности распределения случайной величины q при наличии сигнала в принятой реализации $P_1(q)$ и при отсутствии сигнала в принятой реализации $P_2(q)$

$$P_1(q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D_q}}\exp\left(-\frac{(q-E)^2}{2D_q}\right),$$

$$P_2(q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D_q}}\exp\left(-\frac{q^2}{2D_q}\right). \quad (6)$$

Вероятность правильного обнаружения сигнала в принятом сообщении определяется выражением

$$P_{\text{пр.обн.}} = \int_{h_0}^{\infty} P_1(q)dq. \tag{7}$$

Вероятность ошибочного решения определяется выражением

$$P_{\text{ош.}} = \int_{-\infty}^{h_0} P_1(q)dq. \tag{8}$$

Интегральные зависимости (7) и (8) можно представить в виде функции ошибок $\Phi(h_0)$

$$\Phi(h_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{h_0} e^{-x^2/2} dx. \tag{9}$$

В этом случае вероятность правильного обнаружения сигнала и вероятность ошибки могут быть представлены в виде

$$P_{\text{пр.обн.}} = \Phi\left(-\frac{U}{\sigma\sqrt{2\alpha\tau_k}}\right) = \Phi\left(-\frac{U_0}{\sigma}\sqrt{\frac{N}{2}}\right),$$

$$P_{\text{ош.}} = \Phi\left(\frac{U}{\sigma\sqrt{2\alpha\tau_k}}\right) = \Phi\left(\frac{U_0}{\sigma}\sqrt{\frac{N}{2}}\right). \tag{10}$$

где N – количество некоррелированных отсчетов шума, содержащихся на интервале $T_0 =$ ле $T_0 = \frac{1}{\alpha}$.

Таким образом, вероятность обнаружения экспоненциально затухающего сигнала определяется отношением сигнал/шум U/σ до обработки и количеством некоррелированных отсчетов шума на интервале T_0.

Рассмотрим оценку параметров экспоненциально затухающего сигнала методом максимального правдоподобия. Для этого на основании принятого сообщения (1) запишем логарифм функции правдоподобия

$$\ln\left(L\left(\vec{\acute{\lambda}}\right)\right) = -\frac{1}{2\sigma^2\tau_k}\int_0^{\infty}\left|\hat{y}(t) - \widehat{U}_0 e^{-\acute{\alpha}t} e^{i\acute{\omega}t}\right|^2 dt, \tag{11}$$

где $\vec{\acute{\lambda}}$ – оценочный вектор параметров сигнала.

Штрихами отмечены оценочные параметры сигнала. Дифференцируя (11) по $\widehat{U}_0$ и приравнивая дифференциал к нулю, получим уравнение правдоподобия, из которого следует

$$\widehat{U}_0 = 2\acute{\alpha}\int_0^{\infty}\hat{y}(t) e^{-\acute{\alpha}t} e^{i\acute{\omega}t} dt. \tag{12}$$

Дифференцируя (11) по параметру $\acute{p} = -\acute{\alpha} + i\acute{\omega}$ и приравнивая дифференциал к нулю, получим второе уравнение правдоподобия, из которого следует

$$\widehat{U}_0 = (2\acute{\alpha})^2\int_0^{\infty}\hat{y}(t) e^{-\acute{\alpha}t} e^{i\acute{\omega}t} t dt. \tag{13}$$

Данные выражения определяют оптимальный алгоритм обработки экспоненциально затухающего сигнала. В ядерной спектроскопии для обработки сигналов используется преобразование Фурье. Однако теория оптимального приема рекомендует (12) проводить обработку такого рода сигналов методом преобразования Лапласа. Для этого выполним операцию математического ожидания в (12) от $\widehat{U}_0$

$$M\left(\widehat{U}_0\right) = 2\acute{\alpha}\int_0^{\infty} M\big(\hat{y}(t)\big) e^{-\acute{\alpha}t} e^{i\acute{\omega}t} dt = 2\acute{\alpha}\widehat{U}_0\int_0^{\infty} e^{-(\acute{\alpha}+\alpha)t} e^{i(\omega-\acute{\omega})t} = \widehat{U}_0 \frac{2\acute{\alpha}}{(\acute{\alpha}+\alpha) - i(\omega-\acute{\omega})}. \tag{14}$$

Спектр сигнала при преобразовании Лапласа является двумерным $(\acute{\alpha}, \acute{\omega})$ и комплексным. В точке максимума при $\acute{\alpha} = \alpha$ и $\acute{\omega} = \omega$ математическое ожидание от оценочного значения $\widehat{U}_0$ дает точное значение $\widehat{U}_0$. Следовательно, решение выражения (12) несмещенное. Дисперсия оценочного значения $\widehat{U}_0$ может быть определена в точке максимума согласно выражению

$$D_{\widehat{U}_0} = M\left|\widehat{U}_0 - M\left(\widehat{U}_0\right)\right|^2 = 2\alpha\tau_k\sigma^2. \tag{15}$$

Следовательно, отношение сигнал/шум θ в точке максимума спектральной линии при преобразовании Лапласа будет равно

$$\theta = \frac{|\widehat{U}_0|}{\sqrt{2\alpha\tau_k\sigma^2}} = \frac{|\widehat{U}_0|}{\sigma}\sqrt{\frac{N}{2}}. \tag{16}$$

Оно совпадает с аргументом функции ошибок в (10).

Вторым уравнением правдоподобия является (13). Оно отличается от преобразования Лапласа весовым множителем t. Смысл этого множителя заключается в том, что для оценки частоты и коэффициента затухания, первые отсчеты принятого сообщения менее информативны, чем отсчеты в конце сообщения. Данное выражение предпочтительнее при оценке частоты или коэффициента затухания.

Оценим дисперсии параметров экспоненциально затухающих сигналов. Для этого определим элементы информационной матрицы Фишера по выражению

$$J_{ij} = -M\left(\frac{d\ln L(\vec{\lambda})}{d\lambda_i d\lambda_j}\right), \tag{17}$$

где M – оператор математического ожидания;
$\vec{\lambda}$ – вектор параметров сигнала.

Элементы информационной матрицы Фишера находятся в точке максимума, гда $\overrightarrow{\lambda} = \vec{\acute{\lambda}}$. Дифференцируя (11) два раза по амплитуде $\acute{U}_0$, получим

$$J_{11} = \frac{1}{2\alpha\tau_k\sigma^2}. \tag{18}$$

Обратная величина определяет дисперсию амплитуды экспоненциально затухающего сигнала D_U

$$D_U = 2\alpha\tau_k\sigma^2 = \frac{2\sigma^2}{N}. \tag{19}$$

Оно совпадает со значением дисперсии (15). Аналогичным образом можно получить дисперсию начальной фазы D_{φ_0}

$$D_{\varphi_0} = \frac{2\sigma^2}{|\widehat{U}|^2 N}. \tag{20}$$

Дифференцируя (11) по частоте $\acute{\omega}$ и коэффициенту затухания $\acute{\alpha}$, можно получить дисперсии D_ω и D_α

$$D_\omega = D_\alpha = \frac{4\sigma^2}{|\widehat{U}|^2 N T_0^2}. \tag{21}$$

Таким образом, получены оценки дисперсии параметров экспоненциально затухающего сигнала, оценки согласно выражению Рао – Крамера.

Рассмотрим результаты модельных экспериментов для экспоненциально затухающего сигнала с двумя составляющими. Введем относительные параметры:

$a = \frac{\mathrm{U}_0}{\alpha}$ – относительная амплитуда;

$b = \frac{\omega_0}{\alpha}$ – относительная частота;

$x(\omega) = \frac{\omega}{\alpha}$ – относительная оценочная частота.

Форма сигнала, состоящего из двух составляющих с параметрами: $a_1 = 1, a_2 = 1{,}2, b_1 = 0, b_2 = 15$, представлена на рис.1. Коэффициент корреляции при таком разнесении составляющих близок к нулю $R = 0{,}072$. Шумовая составляющая равна 0,1. Следовательно, составляющие сигналов ортогональны и могут быть разрешены классическими методами. Оценки относительных частот $\acute{b}_1$ и $\acute{b}_2$ достаточно точно определяются по пересечению кривой с горизонтальной осью. Однако амплитуды оцениваются с достаточно большой погрешностью.

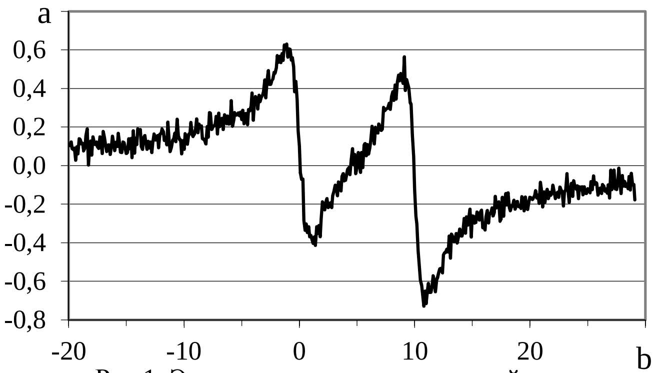

Рис.1. Экспоненциально затухающий сигнал с двумя составляющими

При сближении относительных частот $b_1 = 0, b_2 = 3$ (рис.2) становится сложно оценить относительные частоты $\acute{b}_1$ и $\acute{b}_2$ и даже структуру сигнала. Коэффициент корреляции двух составляющих равен в этом случае $R = 0{,}26$. Это значение коэффициента корреляции можно считать критическим.

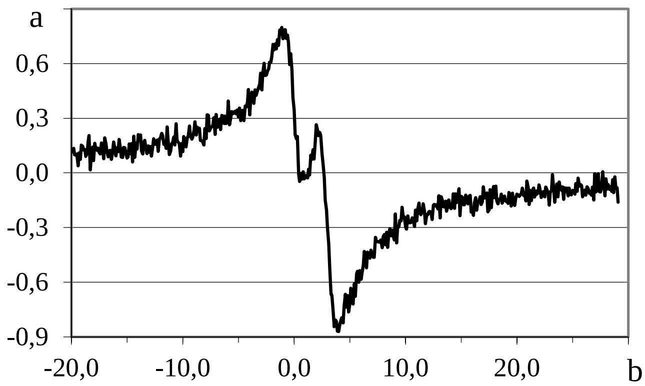

Рис.2. Экспоненциально затухающий сигнал с двумя составляющими. Частоты сближены

На рис.3 показан сигнал с составляющими, характеризующимися относительными частотами $b_1 = 0, b_2 = 2$. Коэффициент корреляции равен $R = 0{,}46$. При всем желании на этом рисунке выделить две составляющие невозможно.

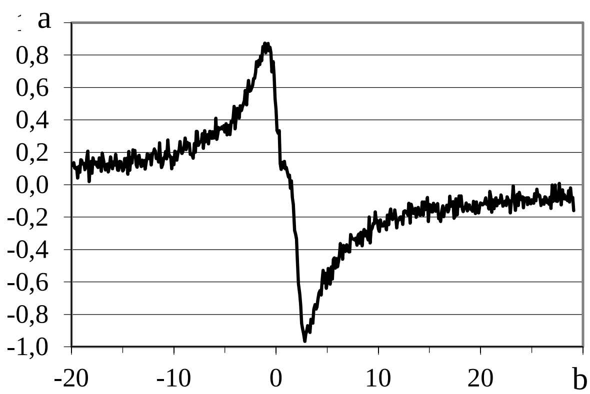

Рис.3. Экспоненциально затухающий сигнал с двумя составляющими

На рис.4 показана функция корреляции сигнала, созданного тонкой пленкой. Пунктиром разделены области, где возможно классическое решение (справа от пунктирной линии). Слева от пунктирной линии классическое решение невозможно. В этом случае две составляющие сливаются вместе.

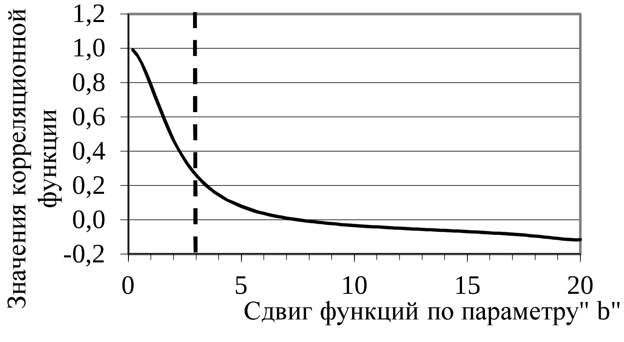

Рис.4. Корреляционная функция

Рассмотрим возможности обработки одиночного сигнала, созданного одним слоем на основе метода максимального правдоподобия. Введем параметры обработки

$$\acute{a} = -\frac{\overline{\left[y_n \frac{x_n+\acute{b}}{(x_n+\acute{b})^2+1}\right]}}{\overline{\left[\frac{x_n+\acute{b}}{(x_n+\acute{b})^2+1}\right]^2}} \quad ,\Delta(\acute{b}) = \frac{1}{\left(1+\frac{\acute{a}}{\overline{y_n^2}}\left(y_n \frac{x_n+\acute{b}}{(x_n+\acute{b})^2+1}\right)\right)},$$

где $\acute{a}$ – оценка относительной амплитуды;
y_n – выборка данных, $N = 500$;
$\acute{b}$ – оценка относительной частоты;
x_n – выборка, определяющая зависимость от относительной текущей частоты, $x_n = \frac{\omega_n}{\alpha}$;
$\Delta(\acute{b})$ – нормированный функционал правдоподобия (чем больше значение функционала в максимуме, тем достовернее оценки параметров$\acute{a}$ и $\acute{b}$);
$\overline{y_n^2}$ – средний квадрат выборки данных.

Задавая произвольное значение $\acute{b}$ из области определения, можно определить $\acute{a}$, а затем и точку функционала $\Delta(\acute{b})$. Перебирая все значения $\acute{b}$, получим функцию $\Delta(\acute{b})$. Максимум этой функции определяет параметры $\acute{a}$ и $\acute{b}$. ЗначениеΔ_{max} связано с дисперсией шума и определяет степень достоверности оценок $\acute{a}$ и $\acute{b}$. На рис.5 показана функция $\Delta(\acute{b})$.

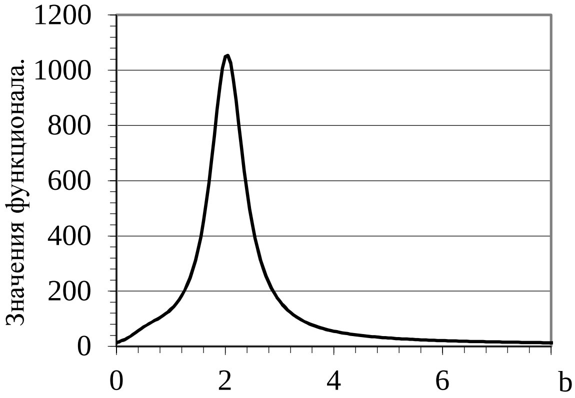

Рис.5. Зависимость функционала от относительной частоты

Она получена при следующих параметрах сигнала: $\acute{a} = 1, \acute{b} = 2, U_ш = 0{,}01$. Значение функционала в максимуме достигает Δ_{max}= 1025. В этом случае достоверность оценочных значений параметров высокая: $\acute{a} = 1{,}00982, \acute{b} = 2{,}05$.

Помехоустойчивость метода обработки представлена в таблице 1. В зависимости от отношения сигнал/шум (первый столбец таблицы) даны оценочные значения параметров $\acute{a}$ и $\acute{b}$. В последнем столбце даны значения максимума функционала Δ_{max}. Из таблицы ясно, что удовлетворительные оценки можно получить при отношении сигнал/шум более 20 дБ. В этом случае Δ_{max} опускается до значения $\sim 11{,}5$. Это ниеΔ_{max} может служить критерием для отбора достоверных оценок. При этом погрешность амплитуды составляет не более 6,8 %, погрешность относительной частоты составляет не более 17,5 %.

Таблица 1. Определение относительных значений параметров сигналов при различных отношениях сигнал/шум

$U_c/U_ш$, дБ	$\acute{a}$	$\acute{b}$.	Δ_{max}
60	0,99998	2,00000	$1{,}1*10^5$
40	1,0098	2,05	10^3
26	1,029	2,15	43,1
20	1,068	2,35	11,5
13	1,13	2,7	3,64

На основании данных последнего столбца (Δ_{max}) можно оценивать отношение сигнал/шум, которое будет реализовываться в эксперименте.

Таким образом, в случае сигнала, созданного в спектрометре от одного тонкого слоя, можно использовать метод максимального правдоподобия.

Список литературы

1. Бородин П.М. (ред.). Ядерный магнитный резонанс. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1982.
2. Марпл С.Л.-мл. Цифровой спектральный анализ и его приложения. – М.: Мир, 1990.
3. Перов А.И. Статистическая теория радиотехнических систем: учеб. пособие для ВУЗов. – М.: Радиотехника, 2003. – 400 с.
4. Тихонов В.И. Оптимальный прием сигналов. – М.: Радио и связь, 1983. – 320 с.
5. Пахотин В.А., Бессонов В.А., Молостова С.В., Власова К.В. Теоретические основы оптимальной обработки сигналов: курс лекций для радиотехнических специальностей. – Калининград: Изд-во РГУ им. И. Канта, 2008. – 189 с.

Рецензенты:

Волхонская Е.В., д.т.н., профессор кафедры теоретических основ радиотехники Балтийской государственной академии рыбопромыслового флота, г. Калининград.

Захаров В.Е., д.ф.-м.н., профессор, зав. кафедрой радиофизики и информационной безопасности Балтийского федерального университета им. И. Канта, г. Калининград.