

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ С ФУНКЦИЕЙ ХЭВИСАЙДА

Коваленко А.В.¹, Уртенев М.Х.¹, Чубырь Н.О.¹, Узденова А.М.¹

¹ГОУ ВПО Кубанский государственный университет, Краснодар
Краснодар, Россия (350040, Краснодар, ул. Ставропольская, 149) rector@kubsu.ru

Статья посвящена численному решению краевых задач для квазилинейных уравнений математической физики, содержащих функцию Хэвисайда. Такие краевые задачи возникают при асимптотическом анализе краевых задач для уравнений Нернста-Планка и Пуассона. Поэтому возникает необходимость в решении этих задач. Рассматривается новый класс квазилинейных уравнений с частными производными, которые отличаются от класса линейных уравнений тем, что для них не выполняется, очевидным образом, принцип суперпозиции. Однако в разных частях области решения можно использовать принцип суперпозиции с соответствующими уточнениями. Этому посвящается отдельное исследование. Рассматриваются конкретные примеры краевых задач. Приведены некоторые результаты численного решения, построены графики решений нескольких краевых задач и проведен анализ полученных результатов.

Ключевые слова: математическое моделирование, квазилинейные уравнения математической физики, система уравнений Нернста-Планка и Пуассона, численные методы.

THE NUMERICAL DECISION OF REGIONAL PROBLEMS FOR THE QUASILINEAR EQUATIONS OF MATHEMATICAL PHYSICS WITH FUNCTION HEAVISIDE

Kovalenko A.V.¹, Urtenov M.K.¹, Chubyr N.O.¹, Uzdenova A.M.¹

¹The Kuban state university, Krasnodar, Krasnodar, Russia (350040, Krasnodar, street Stavropol, 149)
rector@kubsu.ru

Article is devoted to the numerical decision regional problems for квазилинейных the equations of mathematical physics containing function Хэвисайда. Such regional problems arise at асимптотическом the analysis of regional problems for the equations the Нернста-rod and Пуассона. Therefore there is a necessity for the decision of these problems. The new class квазилинейных the equations with individual derivatives which differ from a class of the linear equations that for them is not carried out, in the obvious image, a principle of superposition is examined. However, in different parts of area of the decision it is possible to use a principle of superposition with corresponding specifications. Separate research is devoted to this. Concrete examples of regional problems are examined. Some results of the numerical decision are resulted, schedules of decisions of several regional problems are constructed and the analysis of the received results is lead.

Keywords: mathematical modeling, the quasilinear equations of mathematical Physics, system of the equations of Nernsta-Planka and Puassona, numerical methods.

При асимптотическом решении некоторых краевых задач мембранной электрохимии [2, 4, 5] появляются уравнения с частными производными, в которых встречаются члены, зависящие от знака искомой функции и записывающиеся с использованием с функций Хэвисайда [1]:

$$\chi(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0. \end{cases}$$

Добавление в линейные уравнения с частными производными членов с функцией Хэвисайда от искомой функции приводит к новому классу квазилинейных уравнений по свойствам близких, но отличающихся от класса линейных уравнений. Краевые задачи для этого класса квазилинейных уравнений в настоящее время не исследованы, нет эффективных численных методов решения. В связи с этим возникает необходимость в исследовании и решении краевых задач для таких уравнений. Данная статья посвящена численному решению краевых задач для квазилинейных уравнений математической физики, содержащих функцию Хэвисайда.

§ 1. Квазилинейные уравнения параболического типа с функцией Хэвисайда

1. Математическая постановка задачи

Рассмотрим уравнение:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \lambda \Delta S - \chi(S) \operatorname{div}(\tilde{S} \vec{V}) \quad (1)$$

$$t > 0, x \in (0,1), y \in (0, L)$$

со следующими краевыми условиями:

1) граничные условия:

$$\begin{aligned} S|_{x=0} &= A(t, y) < 0, & S|_{x=L} &= B(t, y) < 0, \\ S|_{y=0} &= C(t, x), & S|_{y=L} &= D(t, x) \end{aligned} \quad (2)$$

2) начальное условие:

$$S|_{t=0} = S_0(x, y) \quad (3)$$

3) условия согласования граничных условий:

$$\begin{aligned} C(t, 0) &= A(t, 0); & C(t, 1) &= B(t, 0); \\ D(t, 0) &= A(t, L); & D(t, 1) &= B(t, L) \end{aligned} \quad (4)$$

4) условия согласования граничных и начальных условий:

$$\begin{aligned} S_0(0, y) &= A(0, y); & S_0(1, y) &= B(0, y); \\ S_0(x, 0) &= C(0, x); & S_0(x, L) &= D(0, x) \end{aligned} \quad (5)$$

2. Явный метод численного решения

1. Дискретизация. Область $U = \{(x, y, t) \in [0,1] \times [0, L] \times [0, \infty)\}$ разбивается с шагом h_x , h_y и по t с шагом $h_t = \tau$. Для простоты в дальнейшем рассматривается частный случай $h_x = h_y = h$ и, кроме того, будем использовать одинаковые обозначения для исходных функции и, соответствующих им, разностных функций.

Вводятся массивы четыре одномерных и три двумерных массива соответствующей размерности: $N = \lceil \frac{1}{h} \rceil + 1$, $M = \lceil \frac{L}{h} \rceil + 1$:

$$A[M]; B[M]; C[N]; D[N]; S_0[N, M]; S_p[N, M]; S_n[N, M].$$

При фиксированном t вычисляем массив $A[M]$ по формуле $A(j) = A(t, (j-1)h)$, $j = 1, M$. Аналогично вычисляются массивы B, C, D, S_0 . Через S_p будем обозначать значения функции S на прошлом слое по t , а через S_n – на текущем слое по времени.

2. Вычислим связь S_p, S_n из уравнения для $i = 2, N-1; j = 2, M-1$, используя явную схему.

Для этого переходим от дифференциальных уравнений к разностным, заменяя производные конечными разностями по формулам:

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial t} &\approx \frac{S_n(i, j) - S_p(i, j)}{\tau}, \\ \frac{\partial}{\partial t}(SV_1) &\approx \frac{S_p(i+1, j)V_1(i+1, j) - S_p(i, j)V_1(i, j)}{h}, \\ \frac{\partial}{\partial t}(SV_2) &\approx \frac{S_p(i, j+1)V_2(i, j+1) - S_p(i, j)V_2(i, j)}{h}, \\ \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} &\approx \frac{S_p(i+1, j) - 2S_p(i, j) + S_p(i-1, j)}{h^2}, \\ \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} &\approx \frac{S_p(i, j+1) - 2S_p(i, j) + S_p(i, j-1)}{h^2}. \end{aligned}$$

Подставим эти выражения в уравнение, тогда:

$$\begin{aligned} \frac{S_n(i, j) - S_p(i, j)}{\tau} &= \lambda \frac{S_p(i+1, j) - 2S_p(i, j) + S_p(i-1, j)}{h^2} + \\ &\lambda \frac{S_p(i, j+1) - 2S_p(i, j) + S_p(i, j-1)}{h^2} - \chi(S_p) \operatorname{div}_d(1/h, S_p), \end{aligned}$$

$$i = 2, N-1; j = 2, M-1,$$

где $\operatorname{div}_d(1/h, S_p)$ – дискретный оператор дивергенции, который вычисляется по формуле:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_d(1/h, S_p) &= \frac{S_p(i+1, j)V_1(i+1, j) - S_p(i, j)V_1(i, j)}{h} + \\ &+ \frac{S_p(i, j+1)V_2(i, j+1) - S_p(i, j)V_2(i, j)}{h} \\ i &= 2, N-1; j = 2, M-1. \end{aligned}$$

Разрешим эти уравнения относительно $S_n(i, j)$, тогда получим:

при $i = 2, N-1; j = 2, M-1$:

$$\begin{aligned} S_n(i, j) &= S_p(i, j) + \lambda \frac{\tau}{h^2} (S_p(i+1, j) - 2S_p(i, j) + S_p(i-1, j)) + \\ &+ \frac{\tau}{h^2} (S_p(i, j+1) - 2S_p(i, j) + S_p(i, j-1)) - \chi(S_p) \operatorname{div}_d(\tau/h, S_p), \end{aligned} \quad (6)$$

здесь:

$$\chi(S_p) \operatorname{div}_d(S_p) = \begin{cases} 0, & \text{если } S_p(i, j) \leq 0 \\ \frac{\tau}{h} (S_p(i+1, j)V_1(i+1, j) - S_p(i, j)V_1(i, j)) + \\ + \frac{\tau}{h} (S_p(i, j+1)V_2(i, j+1) - S_p(i, j)V_2(i, j)), & S_p(i, j) > 0 \end{cases}$$

3. Присваивание значений на границах:

$$\begin{aligned} S_p(1, j) &= A(j), j = 1, M, \quad S_p(N, j) = B(j), j = 1, M \\ S_p(i, 1) &= C(i), i = 1, N, \quad S_p(i, M) = D(i), i = 1, N \end{aligned} \quad (7)$$

3. Алгоритм численного решения

1 шаг. $t = 0$, присвоение начальных значений:

$$S_p(i, j) = S_0(i, j), \text{ где } S_0(i, j) = S_0((i-1)h, (j-1)h).$$

2 шаг. $t = t + \tau$, переход на следующий слой:

а) рассчитывается $S_n(i, j)$ по формуле (6), при $i = 2, N-1; j = 2, M-1$.

б) рассчитываются массивы $A[M]; B[M]; C[N]; D[N]$ по формулам:

$$A(j) = A(t, (j-1)h), j = 1, M,$$

$$B(j) = B(t, (j-1)h), j = 1, M,$$

$$C(i) = C(t, (i-1)h), i = 1, N,$$

$$D(i) = D(t, (i-1)h), i = 1, N$$

в) рассчитываются $S_n(1, j), S_n(N, j), S_n(i, 1), S_n(i, M)$ по формулам (7):

d) Выводим график $S_n(i, j)$.

3 шаг. Проверка достижения заданного конечного времени t_k

Если $t < t_k$, то $S_p(i, j) = S_n(i, j)$, $i = 1, N; j = 1, M$, и переход к шагу 2,

иначе выход.

§ 2. Различные обобщения

2.1 Рассмотрим для уравнения (1) другую краевую задачу, а именно, вместо

условия $S|_{y=L} = D(t, x)$ используется условие: $\frac{\partial S}{\partial y}|_{y=L} = 0$. Тогда вместо

$S_p(i, M) = D(i, j)$, $i = 1, N$ используется другое условие

$S_p(i, M) = S_p(i, M - 1)$, $i = 1, N$.

2.2 Полуявная схема

Заменим производные $\frac{\partial S}{\partial t}$, $\frac{\partial}{\partial x}(SV_1)$, $\frac{\partial}{\partial y}(SV_2)$ конечными разностями по тем же

формулам, что и выше, но производные $\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 S}{\partial y^2}$ заменим конечными разностями с

использование значений сеточной функции S_n на текущем слое, т.е.:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \approx \frac{S_n(i+1, j) - 2S_n(i, j) + S_n(i-1, j)}{h^2}$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial y^2} \approx \frac{S_n(i, j+1) - 2S_n(i, j) + S_n(i, j-1)}{h^2}$$

После подстановки в уравнение (1), получится система уравнений для $S_n(i, j)$, которую можно решать, например, с помощью продольно-поперечной прогонки [5].

2.3 Неявная схема (метод итераций)

Если все производные заменить конечными разностями на текущем слое, то получим систему «квазилинейных» алгебраических уравнений относительно S_n вида:

$$WS_n + \chi(QS_n)(GS_n) = 0, \quad (8)$$

где W, Q, G некоторые известные матрицы, причем функция Хэвисайда применяется к матрице покомпонентно. Для решения уравнения (8) можно использовать следующий метод итераций:

$$WS_n^{(k+1)} + \chi(QS_n^{(k)})(GS_n^{(k)}) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (9)$$

Уравнения (9) можно решать, например, продольно-поперечной прогонкой, причем в качестве начального приближения можно рассматривать значения функции S на предыдущем слое, т.е. $S_n^{(0)} = S_p$. При дискретизации нужно использовать различные балансовые соотношения для обеспечения регуляризации разностной схемы.

2.4 Квазилинейные уравнения эллиптического типа с функцией Хэвисайда

Рассмотрим уравнение:

$$\lambda \Delta S - \chi(S) \operatorname{div}(\tilde{S} \vec{V}) = 0$$

$$t > 0, x \in (0,1), y \in (0, L)$$

или, по-другому:

$$\lambda \Delta S = \begin{cases} 0, & S < 0 \\ -\chi(S) \operatorname{div}(\tilde{S} \vec{V}), & S \geq 0 \end{cases}$$

$$t > 0, x \in (0,1), y \in (0, L)$$

Для этого уравнения поставим граничные условия вида (2).

Данную краевую задачу можно решать с помощью метода установления, тогда все сводится к § 1, а если решать непосредственно, то полуявным методом или методом итераций.

2.5 Квазилинейные уравнения гиперболического типа с функцией Хэвисайда

Рассмотрим уравнение:

$$\lambda \left(\frac{\partial^2 S}{dx^2} - \frac{\partial^2 S}{dy^2} \right) - \chi(S) \operatorname{div}(\tilde{S} \vec{V}) = 0$$

$$t > 0, x \in (0,1), y \in (0, L)$$

или

$$\lambda \left(\frac{\partial^2 S}{dx^2} - \frac{\partial^2 S}{dy^2} \right) = \begin{cases} 0, & S < 0 \\ V(x, y) \frac{\partial S}{\partial y}, & S \geq 0 \end{cases}$$

Для этого уравнения поставим соответствующие граничные условия.

Данную краевую задачу также можно решать полуявным методом или методом итераций.

§ 3. Некоторые результаты численного решения

Ниже для сравнения приводятся решения уравнения (1) и уравнений:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \lambda \Delta S, \tag{10}$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \lambda \Delta S - \operatorname{div}(\tilde{S} \vec{V}), \quad (11)$$

с $\lambda = 1$ и одинаковыми краевыми условиями:

$$A = -1.5, B = -1, C = -7x^2 + 8x - 1.5, D = -1.5 \quad (12)$$

В задаче (10), (12) изменение функции S происходит только за счет диффузии, в задаче (11), (12) – за счет диффузии и переноса, а в задаче (1), (12) – частично за счет диффузии и частично за счет переноса.

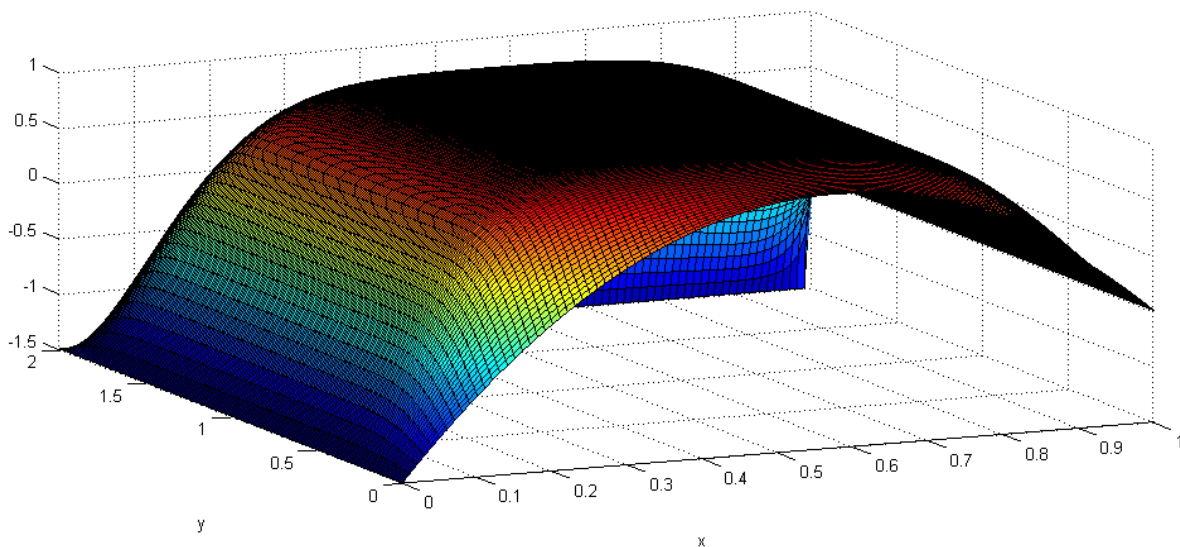


Рис. 1. График решение краевой задачи (1), (2)-(5), (12) при $t = 0.01$

Сравнение решений уравнений (1), (10), (11) с одинаковыми краевыми условиями показывает, что в случае, когда изменения происходят только за счет диффузии (рис. 1, рис. 2 и рис. 3), то график функции S , как и следует, ожидать, более сглажен. Существенное различие решений краевых задач на границе объясняется тем, что именно вдоль границы функция S изменяет свой знак, а в средней части области функция S имеет положительный знак.

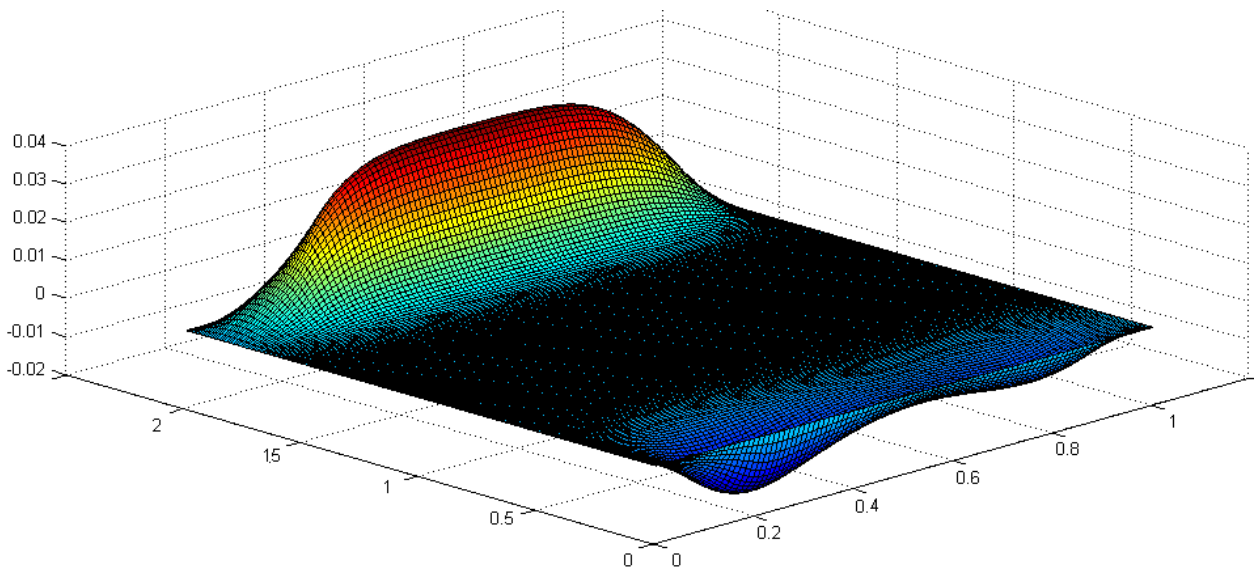


Рис. 2. График разности между решениями краевых задач (1), (2) – (5), (12) и (10), (2) – (5), (12) при $t = 0.01$

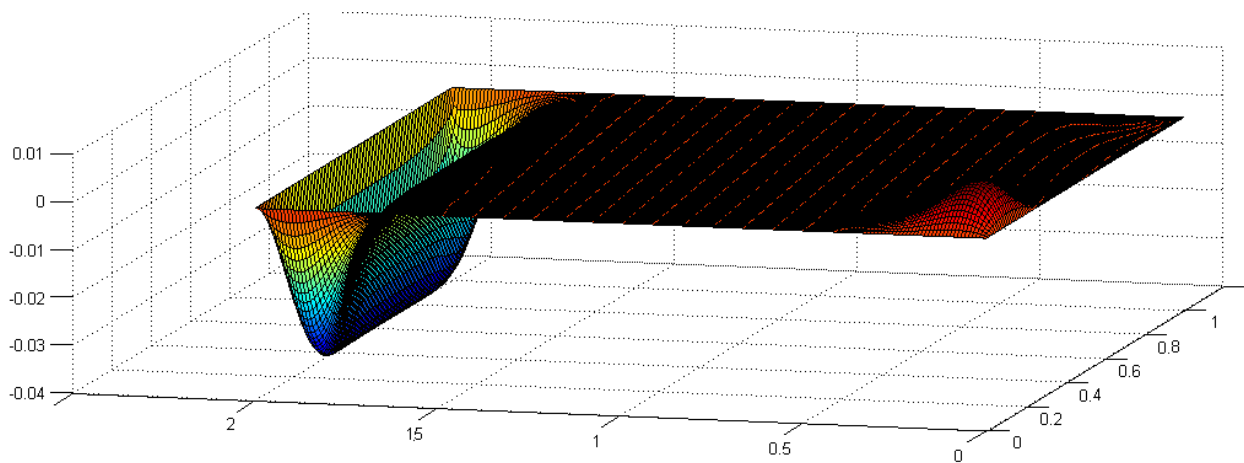


Рис. 3. График разности между решениями краевых задач (1), (2) – (5), (12) и (11), (2) – (5), (12) при $t = 0.01$

По итогам проведенного выше исследования можно сделать следующие выводы:

- 1) член уравнения, содержащий функцию Хэвисайда, оказывает существенное влияние на решение, так как при изменении знак искомой функции может меняться, например, механизм переноса. В задачах мембранной электрохимии это означает, например, превалирование в различных частях области исследования уравнения с функцией Хэвисайда процессов диффузии или конвективного переноса [4, 5]. Учет этих особенностей позволяет модифицировать схемы очистки воды в электродиализных аппаратах водоподготовки для парогенераторов АЭС и ТЭС [2];
- 2) численные расчеты, проведенные выше, показывают, что явная схема оказывает автоматическое регуляризующее воздействие на решение на линии разрыва члена с

функцией Хэвисайда. Эти же свойства сохраняются для полуявной схемы. Однако при использовании неявной схемы необходимо использовать и специальные балансовые соотношения для разностной схемы.

Список литературы

1. Волков И. К., Канатников А. Н. Интегральные преобразования и операционное исчисление: учеб. для вузов. – 2-е изд. – М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2002. – 228 с.

2. Коваленко А. В., Уртенев К. М., Шапошникова Т. Л., Уртенев М. Х. Модификация схем очистки воды в электродиализных аппаратах водоподготовки для парогенераторов АЭС и ТЭС // Энергосбережение и водоподготовка . – 2011. № 5 (73). – С. 33-37.

3. Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы. – М.: Наука, 1989. – 432с.

4. Узденова А. М., Коваленко А. В., Уртенев М. Х. Математическое моделирование процесса обессоливания в ЭДА с учетом электроконвекции и геометрической неоднородности поверхности мембраны // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. —<http://ej.kubagro.ru/2011/08/18/> (дата обращения: 17.03.12).

5. Узденова А. М., Коваленко А. В., Уртенев, М. Х., Никоненко В. В. Математическое моделирование электроконвекции в канале обессоливания электродиализатора с учетом вынужденной конвекции // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. – 2011. – № 3. – С. 5-16.

Рецензенты:

Атрощенко В. А., д.т.н., профессор, заведующий кафедрой информатики Кубанского государственного технологического университета, г. Краснодар.

Красина И. Б., д.т.н., профессор кафедры ТХМиКП Кубанского государственного технологического университета, г. Краснодар.

Попов Ф. А., д.т.н., профессор, зам. директора по ИТ. Бийский технологический институт (филиал) ГОУ ВПО «Алтайский государственный технический университет им. И. И. Ползунова», г. Бийск.