УДК 624.131+539.215

РАСЧЕТ ДВУХСЛОЙНЫХ УПРУГОПОЛЗУЧИХ КРУГЛЫХ ПЛИТ, ЛЕЖАЩИХ НА УПРУГОПОЛЗУЧЕМ НЕОДНОРОДНОМ ОСНОВАНИИ

Дасибеков А. Д.[1], Юнусов А. А.[1], Юнусова А. А.[2]

[1]Южно-Казахстанский государственный университет имени М. Ауэзова.(160012, г. Шымкент, ул. Тауке-Хана, 5); [2]Казахская академия транспорта и коммуникации имени М. Тынышпаева (005009, г.Алматы, ул. Шевченко, 85), yunusov1951@mail.ru

В данной работе излагается методика расчета слоистых упругоползучих круглых плит, расположенных на упругоползучем неоднородном основании. Предлагаемый метод основан на использовании полиномов Гегенбауэра и является дальнейшим развитием метода Т.Ш. Ширинкулова, разработанного для расчета упругих круглых плит, лежащих на упругоползучем основании.

При этом вязкие свойства плиты и грунтового основания описываются теорией упругоползучего тела Маслова – Арутюняна. Неоднородность уплотняемого основания с глубиной изменяется по степенному закону. Для модуля деформации он впервые был принят профессором Г. К. Клейным. Исследуемая задача сводится к установлению закона распределением реактивного давления грунтового основания. При этом соблюдены условия равновесия плит в целом и тождественно удовлетворено контактное условие.

Для иллюстрации изложенного метода рассмотрен пример, где на рисунках приводятся эпюры радиальных и кольцевых моментов, поперечных сил и реактивного давления. При этом действующая на плиту нагрузка считается осесимметричной.

Результаты вычисления показали, что с учетом неоднородности основания максимальный изгибающий момент в середине плиты уменьшается на 16–20 % по сравнению с решением упруго-мгновенной задачи. Кроме того, доказано, что с уменьшением показателя неоднородности уменьшается влияние свойств ползучести материалов.

Ключевые слова: интегро-дифференциальное уравнение, упрогоползучие плиты.

CALCULATION OF DOUBLE-LAYER ELASTICALLY-CREEPING CIRCULAR PLATE, LYING ON ELASTICALLY-CREEPING HETEROGENEOUS FUNDAMENTAL

Dasibekov A. D., Yunusov A. A., Yunusova A. A

South-Kazakhstan State University n.a M. Auezov.(160012, Shymkent city, str. Тауке-Khan, 5),
Kazakh Academy of transport and communication n.a M.Tynyshpaeva (005009, Almaty, Shevchenko, 85),
yunusov1951@mail.ru

Methodic of calculation of layered elastically-creeping circular plate laying on elastically-creeping heterogeneous fundamental is considered in the given work. This method is based on the usage of ultraspherical polynomial and also this method is the following development of T.Sh. Shirinkulov's method.

Frictional property of the plate and soil foundation is described by the theory of Maslov-Arutyunyan elastically-creeping body. Heterogeneity of the compact foundation with depth is changed by the settled law. Firstly, it was accepted by G.K. Klein for the deformation module.

Figures with diagrams of radical and cyclic instants, transverse force and reaction pressure are considered as an example to illustrate the given method. The existing loading on the plate is founded axially symmetric

The calculating results showed that with account of heterogeneity foundation with maximal flexible moment in the middle of the plate is decreased to 16-20% on comparison with salvation of elastically tarns/ it is proved that with decreasing the index of heterogeneity is decreased the property influence of creeping materials.

Key words: integro-differential equation, elastically creeping round plates.

Как известно, многие конструкции, такие, как фундаменты доменных печей и фабричных труб, днища резервуаров и газгольдеров и др., рассчитываются по схеме круглых плит на деформируемом основании. Эти конструкции работают под действием нагрузки, симметричной относительно центра, и поэтому во всех точках, равноудаленных от центра плиты, прогибы будут одинаковы. Это обстоятельство показывает, что при расчете плит под действием осесимметричных нагрузок можно ограничиться рассмотрением их лишь в одном единственном диаметральном сечении, проходящем через ось симметрии.

Теории и методы расчета круглых плит, лежащих на однородном изотропном упругом полупространстве, разработаны в трудах М. И. Горбунова-Посадова [1], П. И. Клубина [7], В. К. Голуба и В. И. Моссаковского [2], В. М. Сеймова [8], В. Н. Жемочкина [3], А. Г. Ишковой [6] и др.

В отличие от этих работ в данной статье излагается методика расчета слоистых круглых плит на неоднородном полупространстве с учетом ползучести материала плиты и грунтов основания.

Предлагаемый метод основан на использовании полиномов Гегенбауэра для представления реакции основания и является дальнейшим развитием метода Т. Ш. Ширинкулова [9,10], разработанного для расчета упругоползучих круглых плит на упругоползучем неоднородном основании. Напряженно-деформированное состояние грунтового основания под действием жесткого ленточного фундамента исследовано в [4,5].

Ниже рассмотрим круглые упругоползучие двухслойные плиты радиусами a_i с постоянными толщинами h_i, свободно (без трения) лежащие на упругоползучем неоднородном основании, модуль упругости и мера ползучести которого с глубиной изменяется по следующим выражениям:

$$\left.\begin{aligned} E(t,z) &= E_m(t)z^m \\ C(t,\tau,z) &= C_m(t,\tau)z^{-m} \end{aligned}\right\}. \tag{1}$$

Плиты находятся под действием нормальных и осесимметричных нагрузок интенсивности q (рисунок 1).

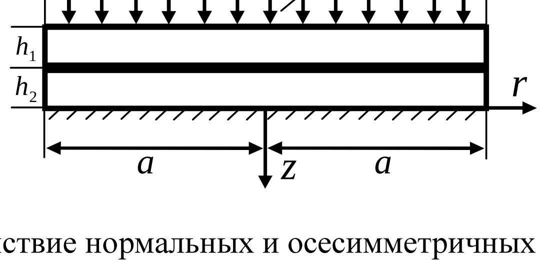


Рисунок 1. Действие нормальных и осесимметричных нагрузок интенсивности q на плиты

Следовательно, реактивное давление $P_i(r,t)$ и прогиб $W_i(r,t)$ должны быть осесимметричными. Здесь под r подразумевается отношение абсолютного значения расстояния от центра плиты до произвольной точки к радиусу плиты, т.е. $r_i = r_i^* / a_i$.

Задача сводится к установлению закона распределения реактивного давления. При этом должны быть соблюдены условия равновесия плит в целом, т.е.:

$$\int_0^1 P(r,t)rdt = \int_0^1 q(r,t)rdr \tag{2}$$

и тождественно удовлетворено контактное условие, т.е.:

$$W_n(r,t) \equiv V(r,t) \tag{3}$$

Прогиб плиты определяется решением интегро-дифференциального уравнения изогнутой поверхности, т.е. оно согласно [9], имеет вид:

$$D(t)\left[\frac{\partial^4 W_i(r,t)}{dr^4} + \frac{2}{r}\frac{\partial^3 W_i(r,t)}{dr^3} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 W_i(r,t)}{dr^2} + \frac{1}{r^3}\frac{\partial^2 W_i(r,t)}{dr^2}\right] +$$

$$+\int_{\tau_1}^{t} D(\tau)\left[\frac{\partial^4 W_i(r,t)}{\partial r^4} + \frac{2}{r}\frac{\partial^3 W_i(r,t)}{\partial r^3} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 W_i(r,t)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^3}\frac{\partial^2 W_i(r,t)}{\partial r^2}\right] \times$$

$$\times R(t,\tau)d\tau) = a^4\left[q_i(r,t) - P_i(r,t)\right], D = D_1 + D_2, \tag{4}$$

где $R(t,\tau)$ – ядро релаксации; $D = D_1 + D_2$ – коэффициент жесткости; W – прогиб плиты.

Осадку основания можно определить как решение интегрального уравнения, связывающего реактивное давление с перемещением поверхностных точек основания. Согласно Т. Ш. Ширинкулову [9], эту величину можно представить так:

$$V(r,t) = \frac{(1-\mu_0^2)a}{\pi E_0(t)}\left[\iint_{\omega} \frac{P(r,t)\partial\omega}{R^{1+m}} - \int_{\tau_{11}}^{t}\iint_{\omega} \frac{P(r,\tau)}{R^{1+m}} K_0(t,\tau)d\omega d\tau\right], \tag{5}$$

где Q – область контакта;

$$R = \sqrt{r^2 + s^2 - 2rs\cos\varphi} \;;$$

$$d\omega = sdsd\varphi \;;$$

$E_0(t) = E_m t)a^m$ – приведенный модуль деформации.

Уравнения (4), (5) в интегрально-операторном виде соответственно записываются так:

$$(1+R^*)\left[\frac{\partial^4 W(r,t)}{dr^4} - \frac{2}{r}\frac{\partial^3 W(r,t)}{dr^3} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial^2 W(r,t)}{dr^2} + \frac{1}{r^3}\frac{\partial W(r,t)}{dr}\right] = \frac{a_4}{D(t)\left[q(r,t) - P(r,t)\right]} \tag{6}$$

$$V(r,t) = \frac{(1-\mu_0^2)a}{\pi E_0(t)}(1-K_0^*)\iint_Q \frac{P(r,t)d\omega}{R^{1+m}}, \tag{7}$$

где операторы R^*, K_0^* определяются согласно формулам:

$$R^* f = \frac{1}{E(t)}\int_{\tau_1}^{t} R(t,\tau)E(\tau)f(\tau)d\tau \qquad (8)$$

$R(t,\tau)$ – резольвента ядра $K(t,\tau)$, т.е.

$$K^* f = \int_{\tau_1}^{t} K(t,\tau)f(\tau)d\tau;\; K(t,\tau) = E(t)\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\frac{1}{E(\tau)} + C(t,\tau)\right] = E(t)\frac{\partial}{\partial\tau}[\delta(t,\tau)]; \qquad (9)$$

Таким образом, согласно данной математической модели, решение исследуемой задачи сводится к решению системы (3),(6),(7) уравнений при (1),(7) и (9) выражениях.

Следуя Т. Ш. Ширинкулову [9], реактивное давление $P(r,t)$ может быть представлено рядом из четных полиномов Гегенбауэра $C_{2n}^{\frac{m}{2}}(r)$, деленных на $(1-r^2)^{\frac{1-m}{2}}$, т.е.:

$$P(r,t) = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^{1-m}}}\sum_{n=0}^{\infty} A_{2n}(t)C_{2n}^{\frac{m}{2}}(r). \qquad (10)$$

Нечетные полиномы исключаются из выражения (10) как непригодные по физическим соображениям.

Подставляя (10) в (6) и имея в виду зависимость (8), после интегрирования по r, общее решение уравнения (6) получим в виде:

$$W(r,t) = C_0(t) + C_1(t)\ell nr + C_2(t)r\ell nr + C_3(t)r^2\ell nr + \frac{a_4}{D(t)}(1-K^*)\left[f_q(r,t) - \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n}(t)F_{2n}(r)\right], \qquad (11)$$

здесь $f_q(r,t)$ – частный интеграл уравнения (6), зависящий от вида заданной нагрузки $q(r,t)$. Функции $F_{2n}(r)$ и частный интеграл $f_q(r,t)$ в общем виде можно определить из формул:

$$F_{2n}(r) = \frac{\lambda 2n}{4}\int_0^r \frac{d^{2n}(1-\rho^2)^{\frac{4n+m-1}{2}}}{d\rho^{2n}}\left[\rho^2 + r^2 - (\rho^2 + r^2)\ell n\frac{\rho}{r}\right]\rho\, d\rho, \qquad (12)$$

$$f_q(r,t) = \frac{1}{4}\int_0^r q(P,t)\left[\rho^2 + r^2 - (\rho^2 + r^2)\ell n\frac{\rho}{r}\right]\rho d\rho. \qquad (13)$$

Согласно (11), найдем:

$$W'(r,t) = 2C_1(t)r + C_2(t)\frac{1}{r} + C_3(t)(2r\ell nr + r) + \frac{a^4}{D(t)}(1-K^*)\left[f_q'(r,t) - \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n}(t)F_{2n}'(r)\right], \qquad (14)$$

$$W''(r,t) = 2C_1(t) - C_2(t)\frac{1}{r^2} + C_3(t)(2\ell nr + 1) + \frac{a^4}{D(t)}(1-K^*)\left[f_q''(r,t) - \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n}(t)F_{2n}''(r)\right], \qquad (15)$$

$$W'''(r,t) = 2C_2(t)\frac{1}{r^3} + 2C_3(t)\frac{1}{r} + \frac{a^4}{D(t)}(1-K^*)\left[f_q'''(r,t) - \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n}(t)F_{2n}'''(r)\right], \qquad (16)$$

Согласно зависимости, связывающей усилия и прогиб плиты, находим:

$$\left.\begin{aligned}
M_r &= -\frac{D(t)}{a^2}(1+R^*)\left(\frac{\partial^2 W(r,t)}{\partial r^2}+\frac{\mu}{r}\frac{\partial W(r,t)}{\partial r}\right)\\
M_\varphi &= -\frac{D(t)}{a^2}(1+R^*)\left(\mu\frac{\partial^2 W(r,t)}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{}{r}\frac{\partial W(r,t)}{\partial r}\right)\\
Q_r &= -\frac{D(t)}{a^3}(1+R^*)\left(\frac{\partial^3 W(r,t)}{\partial r^3}+\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{r}\frac{W(r,t)}{\partial r^2}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial W(r,t)}{\partial r}\right)
\end{aligned}\right\}. \qquad (17)$$

Тогда с помощью формул (14) – (17) можно определить усилия в плите.

Постоянные интегрирования $C_i(t)$ $(i=1,2,3)$ можно найти из граничных условий рассматриваемой задачи. Коэффициенты разложения $A_{2n}(t)$ вычисляются на основании уравнений (2) и (3).

Для иллюстрации изложенного метода рассмотрим следующую задачу. Рассмотрим осесимметричную нагрузку, действующую на некоторую часть плиты. Пусть внешняя активная нагрузка состоит из равномерно распределенной осессимметричной нагрузки интенсивности q по кругу радиуса α, распределенной сосредоточенной силы P и сосредоточенного момента M, действующего по окружности этого круга (рисунок 2).

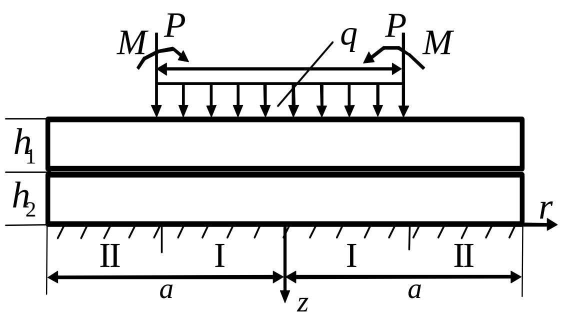


Рисунок 2. Сосредоточенная и прерывно-осесимметричная нагрузки

Интегро-дифференциальное уравнение изгиба слоистых круглых плит определяется формулой (6), в которой $q(r,t)=q=const$, а $P(r,t)$ имеет вид (10).

Обозначим через I внутреннюю область круга радиуса α и через II – внешнюю область по отношению к этому кругу. Полный интеграл уравнения (6) для первой области выразится так:

$$W_1(r,t)=C_{0\cdot 1}(t)+C_{1\cdot 1}(t)r^2+C_{2\cdot 1}(t)\ell nr+C_{3\cdot 1}(t)r^2\ell nr+\frac{a^4}{D(t)}(1-K^*)\left[\frac{r^4}{64}q-\sum_{n=0}^{\infty}A_{2n}(t)F_{2n}(r)\right], \quad (18)$$

а для второй –

$$W_2(r,t)=C_{0\cdot 2}(t)+C_{1\cdot 2}(t)r^2\pm C_{2\cdot 2}(t)\ell nr\pm C_{3\cdot 2}(t)r^2\ell nr-\frac{a^4}{D(t)}(1-K^*)\left[\sum_{n=0}^{\infty}A_{2n}(t)F_{2n}(r)\right]. \quad (19)$$

Радиальные, кольцевые изгибающие моменты M_z , M_φ и поперечные силы $\theta(r,t)$ для первой и второй областей, согласно (17), будут:

$$M_{1.r}(r,t)=-(1+R^*)2(1+\mu)a^2\left\{C_{1.1}(t)-\frac{1-\mu}{1+\mu}\cdot\frac{C_{2.1}(t)}{2r^2}+\right.$$

$$\left.+C_{3\cdot 1}(t)\left[\ell nr+\frac{1}{2}\left(\frac{\mu+3}{\mu+1}\right)\right]+(1-K^*)\left[\frac{\mu+3}{\mu+1}\cdot\frac{qr^2}{32}-\sum_{n=0}^{\infty}A_{2n}(t)\varphi_{2n}(r)\right]\right\}, \quad (20)$$

$$M_{1\cdot\varphi}(r,t)=-2(1+R^*)(1+\mu)a^2\left\{C_{1.1}(t)-\frac{1-\mu}{1+\mu}\cdot\frac{C_{21}(t)}{2r^2}+\right.$$

$$\left.+C_{3\cdot 1}(t)\left[\ell nr+\frac{1}{2}\left(\frac{1+3\mu}{1+\mu}\right)\right]+(1-K^*)\left[\frac{1+3\mu}{1+\mu}\cdot\frac{qr^2}{32}-\sum_{n=0}^{\infty}A_{2n}(t)\overline{\varphi}_{2n}(r)\right]\right\}, \quad (21)$$

$$M_{2\cdot r}(r,t)=-2(1+R^*)(1+\mu)a^2\left\{C_{1\cdot 2}(t)-\frac{1-\mu}{1+\mu}\cdot\frac{C_{2.2}(t)}{2r^2}+\right.$$

$$\left.+C_{3\cdot 2}(t)\left[\ell nr+\frac{1}{2}\left(\frac{\mu+3}{\mu+1}\right)\right]-(1-K^*)\sum_{n=0}^{\infty}A_{2n}(t)\varphi_{2n}(r)\right\}, \quad (22)$$

$$M_{2.\varphi}(r,t)=-2(1+R^*)(1+\mu)a^2\left\{C_{1.2}(t)-\frac{1-\mu}{1+\mu}\cdot\frac{C_{2.2}(t)}{2r^2}+\right.$$

$$\left.+C_{3\cdot 2}(t)\left[\ell nr+\frac{1}{2}\left(\frac{1+3\mu}{1+\mu}\right)\right]-(1-K^*)\sum_{n=0}^{\infty}A_{2n}(t)\overline{\varphi}_{2n}(r)\right\}, \quad (23)$$

$$Q_{1\cdot r}(r,t)=-(1-R^*)\frac{a}{2}\left[\frac{8}{r}C_{3\cdot 1}(t)+(1+K^*)\left(qr-\sum_{n=0}^{\infty}A_{2n}(t)\overline{\psi}_{2n}(r)\right)\right], \quad (24)$$

$$Q_{2\cdot r}(r,t)=-(1-R^*)\frac{a}{2}\left[\frac{8}{r}C_{3\cdot 2}(t)-(1-K^*)\sum_{n=0}^{\infty}A_{2n}(t)\overline{\psi}_{2n}(r)\right], \quad (25)$$

выражения для функций $\varphi_{2m}(r)$, $\overline{\varphi}_{2n}(r)$, $\overline{\varphi}_{2n}(r)$ имеют вид:

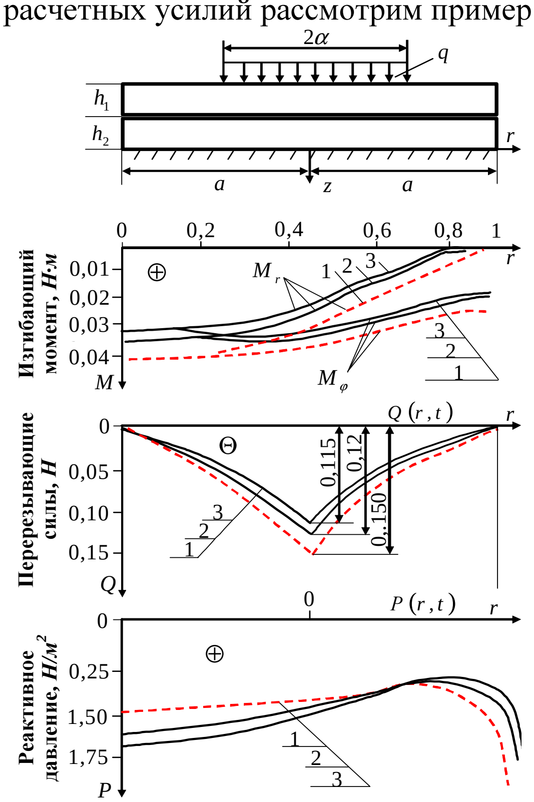
$$\varphi_{2n}(r)=\lambda_{2n}\int_0^r\frac{d^{2n}(1-\rho^2)^{\overline{\frac{1}{2\cdot(4n+m-1)}}}}{d\rho^{2n}}\left[\frac{1-\mu}{1+\mu}\left(1-\frac{\rho^2}{r^2}\right)-2\ell n\frac{\rho}{r}\right]\rho\,d\rho\ ; \quad (26)$$

$$\overline{\varphi}_{2n}(r)=\lambda_{2n}\int_0^r\frac{d^{2n}(1-\rho^2)^{\overline{\frac{1}{2\cdot(4n+m-1)}}}}{d\rho^{2n}}\left[\frac{1-\mu}{1+\mu}\left(\frac{\rho^2}{r^2}-1\right)-2\ell n\frac{\rho}{r}\right]\rho d\rho\ ; \quad (27)$$

$$\overline{\psi}_{2n}(r)=\lambda_{2n}\left\{\frac{d^{2n-1}(1-r^2)^{\overline{\frac{1}{2\cdot(4n+m-1)}}}}{rdr^{2n-1}}-\frac{d^{2n-2}(1-r^2)^{\overline{\frac{1}{2\cdot(4n+m-1)}}}}{rdr^{2n-2}}+\frac{1}{r}\left[\frac{d^{2n-2}(1-r^2)^{\overline{\frac{1}{2\cdot(4n+m-1)}}}}{rdr^{2n-2}}\right]\right\}_{r=0} \quad (28)$$

Произвольные постоянные находим из условий в центре и на краю плиты, а также условий сопряжения областей 1 и 2.

Для выяснения влияния ползучести материала плиты и неоднородности основания на величины расчетных усилий рассмотрим пример (рисунок 3).



1) $t=\tau$; 2) $\tau_1=14, t=180$; 3) $\tau_1-14, t=360(t,\tau$ *в сутках*$)$

--------Решение упруго-мгновенной задачи; ______Решение упругоползучей задачи.

Рисунок 3. Эпюры $M_r(r,t)$, $M_\varphi(r,t)$, $Q(r,t)$ и $P(r,t)$ при $m=0{,}75$

Здесь приняты следующие характеристики для материала плиты и грунта:

$$a=2\text{м};\ h=0{,}2\text{м};\quad \mu=\frac{1}{6};\ E=2\cdot10^4\,\text{МПа};\quad C_1=0{,}9\cdot10^{-4}(\text{МПа})^{-1};$$

$$A_1=4{,}82\cdot10^{-4}(\text{МПа})^{-1};\ \gamma_1=0{,}026;\quad \beta_1=0{,}34;\quad \alpha_1=0{,}086\quad E_0=25\text{МПа};\quad \mu_0=0{,}375;$$

$$C_0=0{,}025(\text{МПа})^{-1};\quad A_0=0{,}44(\text{МПа})^{-1}\text{сутки};\quad \gamma_0=0{,}37;\quad \beta_0=1;\alpha_0=0{,}0051;\ R=0{,}4\text{м}.$$

По результатам вычислений построены эпюры радиальных и кольцевых моментов M_r и M_φ, поперечных сил $Q(r,t)$ и реакций $P(r,t)$.

При $m=0{,}75$ максимальный изгибающий момент (сплошная линия) в середине плиты уменьшается на 16 % (при t=180 суток) и на 20 % (при t=360 суток) по сравнению с решением упруго-мгновенной задачи (пунктирная линия), а эпюра реактивного давления имеет ту же характерную форму, что и при расчете упругоползучих полос на упругоползучем неоднородном основании (рисунок 3). Нетрудно доказать, что с уменьшением показателя неоднородности уменьшается влияние свойств ползучести, например, при $m = 0{,}5$ максимальный изгибающий момент в середине плиты уменьшается на 12 % (при $t = 180$ суток) и на 16 % (при t=360 суток) по сравнению с решением упруго-мгновенной задачи. Ввиду симметричности нагрузки и конструкции на рисунке 3 показаны только правая половина эпюр.

Список литературы

1. Горбунов-Посадов М. И., Маликова Т. А., Соломин В. И. Расчет конструкций на упругом основании. 3-е изд., перераб. и доп. – М.: Стройиздат, 1996. – 224 с.
2. Голуб В. К., Массаковский В. И. Изгиб круглой плиты на упругом полупространстве при наличии сцепления // Изв. АН СССР, ОТН, сер. Механика и машиностроение. – 1960. – № 2. – С.27-33.
3. Жемочкин В. Н. Расчет круглых плит на упругом основании. – М.: Военно-инженерная академия им. В. В. Куйбышева, 1938. – С.7-53.
4. Зарецкий Ю. К. Напряженно-деформированное состояние грунтового основания под действием жесткого ленточного фундамента. – М.: Моя жизнь в журнале "Основания, фундаменты и механика грунтов", 2005. – С. 159-168.
5. Зарецкий Ю. К. Расчеты сооружений и оснований по предельным состояниям. – М.: Моя жизнь в журнале "Основания, фундаменты и механика грунтов", 2005. – С. 360-375.
6. Ишкова А. Г. Изгиб круглой пластинки, лежащей на упругом полупространстве, под действием осесимметричной равномерно распределенной нагрузки // Ученые записки МГУ, сер. Механика. – 1951. – Т.3, вып. 152. – С.3-124.
7. Клубин П. И. Расчет балочных и круглых плит на упругом основании // Инженерный сборник ИМ АН СССР. – 1952. – Т.12. – С. 10-18.
8. Сеймов В. М. Расчет балочных плит на упругом основании с учетом сил трения при вертикальной распределенной нагрузке //ДАН УРСР. – 1958. – № 10. – С.56-71.
9. Ширинкулов Т. Ш. Расчет круглых плит на неоднородном основании, обладающем свойством ползучести // Вопросы механики: сб. № 15. – Ташкент, 1974. – С.41-46.
10. Ширинкулов Т. Ш., Дасибеков А., Юнусов А. А., Уралов Б. К., Кабылбеков К. А., Абильмаженов Т. Ш. Изгиб балочной плиты, нагруженной обратно-симметричной нагрузкой // Материалы III Международной научной конференции «Актуальные проблемы механики и машиностроения». Т.1. – Алматы, 2009. – С.304-307.

Рецензенты:

Арапов Б. Р., доктор технических наук, профессор кафедры прикладной механики Южно-

Казахстанского государственного университета имени М. Ауэзова, г. Шымкент.
Исламкулов К. М., доктор технических наук, профессор кафедры математики Южно-Казахстанского государственного педагогического института, г. Шымкент.