

ОБРАБОТКА СИГНАЛОВ В ФМР МЕТОДОМ МАКСИМАЛЬНОГО ПРАВДОПОДОБИЯ

Власова К. В., Пахотин В. А., Молостова С. В.

Балтийский федеральный университет имени И. Канта, г. Калининград, Россия (236040, г. Калининград, ул. Ал. Невского, 14-а) p_ksenia@mail.ru

В данной работе рассматривается теория оптимального приема в приложении к сигналам ферромагнитного резонанса. Решается вопрос о повышении разрешения двух сигналов с близкими резонансными частотами. Показано, что при последовательном применении теории оптимального приема разрешающая способность будет определяться не критерием Релея, а отношением сигнал/шум и частотой дискретизации отсчетов в выборке данных. С помощью модельных расчетов было проведено сравнение разрешающей способности для метода максимального правдоподобия и для классического метода (преобразование Фурье). Получено следующее: при коэффициенте корреляции двух сигналов более 0,09 классический метод обработки дает погрешность, а при коэффициенте корреляции более 0,5 сигналы становятся неразличимы. Метод максимального правдоподобия достоверно определяет параметры сигнала даже при коэффициенте корреляции порядка 0,9. Также был проведен анализ помехоустойчивости метода максимального правдоподобия. Результат исследования: при отношении сигнал/шум ~6 дБ параметры двух сигналов определяются достоверно. При понижении отношения сигнал/шум до -3,5 дБ частоты также определяются достоверно.

Ключевые слова: ферромагнитный резонанс, метод максимального правдоподобия, разрешающая способность.

PROCESSING OF SIGNALS IN A FMR THE METHOD OF THE MAXIMUM CREDIBILITY

Vlasova K. V., Pahotin V. A., Molostova S. V.

The Baltic federal university of a name of I.Kanta, Kaliningrad, Russia (236040, Kaliningrad, street Al. Nevskogo, 14) p_ksenia@mail.ru

In the given work the theory of optimum reception in the appendix to signals of a ferromagnetic resonance is considered. The question on increase of the permission of two signals is solved with close resonant frequencies. It is shown that at consecutive application of the theory of optimum reception resolution will be defined not by criterion of Relej, and the relation a signal/noise and frequency of digitization of readout in sample of the data. By means of modeling calculations comparison resolution for a method of the maximum credibility and for a classical method (transformation of Fure) has been spent. The following is received: at factor of correlation of two signals more than 0,09, classical method processings are given by an error, and at factor of correlation more than 0,5 signals become indiscernible. The method of the maximum credibility authentically defines signal parameters even at factor of correlation of an order 0,9. Also the analysis of a noise stability of a method of the maximum credibility has been carried out. Result of research: at the relation a signal/noise ~6 дБ parameters of two signals are defined authentically. At fall of the relation a signal/noise to-3,5дБ frequencies also are defined authentically.

Key words: Ferromagnetic resonance, method of the maximum credibility, resolution.

Сигналы ФМР имеют вид экспоненциально затухающих сигналов. Преобразование Фурье позволят получить комплексный спектр, действительная часть которого определяет линию Лоренца, а мнимая часть – линию поглощения. В ФМР спектроскопии для обнаружения сигнала, а также для оценки параметров используют линию Лоренца. Она описывается выражением:

$$S(\vec{\lambda}, t) = -\frac{a(x-b)}{(x-b)^2+1}, \quad (1.)$$

где $\vec{\lambda}$ – вектор параметров сигнала;

a – амплитудное значение, нормированное на коэффициент поглощения $a = \frac{U_0}{\alpha}$;

b – резонансная частота, нормированная на коэффициент поглощения $b = \frac{\omega_0}{\alpha}$;

x – текущая нормированная частота $x = \frac{\omega}{\alpha}$.

Методом максимального правдоподобия можно получить выражения для оптимальной обработки сигнала (1.) /1/

$$\hat{a} = \frac{\sum_{n=1}^N y_n \frac{(x_n - \hat{b})}{(x_n - \hat{b})^2 + 1}}{\sum_{n=1}^N \frac{(x_n - \hat{b})^2}{((x_n - \hat{b})^2 + 1)^2}},$$

$$\Delta(\hat{b}) = \sum_{n=1}^N \left| y_n - \frac{\hat{a}(x_n - \hat{b})}{(x_n - \hat{b})^2 + 1} \right|^2, \quad (2.)$$

где y_n – выборка данных, содержащая сигнал (1.).

Штрихами отмечены оценочные параметры. Задавая \hat{b} в пределах области определения, можно найти \hat{a} и определить точку функционала $\Delta(\hat{b})$. Перебирая все значения \hat{b} , можно найти зависимость $\Delta(\hat{b})$. Минимум этой зависимости определяет ее решение, т.е. оценочные значения \hat{a} и \hat{b} . Если в выборке данных будет два или три сигнала ФМР, то зависимость $\Delta(\hat{b})$ будет содержать два или три минимума, по которым определяются параметры этих сигналов ФМР. Это классический способ оценки параметров. Разрешающая способность этого метода ограничена областью ортогональности двух сигналов ФМР. Если два сигнала ФМР по частоте являются неортогональными, тогда данный метод разрешить эти сигналы не может.

Для получения высокого разрешения двух сигналов ФМР необходимо использовать другой алгоритм для обработки сигналов /1/. Записывая два сигнала ФМР в виде

$$S_1(\vec{\lambda}, x) = a_1 f(\vec{\lambda}, x), S_2(\vec{\lambda}, x) = a_2 f(\vec{\lambda}, x), \quad (3)$$

можно получить систему уравнений. Их решение следующее:

$$\hat{a}_1 = \frac{\overline{\frac{y_n f(x_n \hat{b}_1)}{f^2(x_n \hat{b}_1)}} - R \overline{\frac{y_n f(x_n \hat{b}_2)}{(f^2(x_n \hat{b}_1) f^2(x_n \hat{b}_2))^{1/2}}}}{1 - R^2}, \quad (4.)$$

$$\hat{a}_2 = \frac{\overline{\frac{y_n f(x_n \hat{b}_2)}{f^2(x_n \hat{b}_2)}} - R \overline{\frac{y_n f(x_n \hat{b}_1)}{(f^2(x_n \hat{b}_2) f^2(x_n \hat{b}_1))^{1/2}}}}{1 - R^2},$$

$$\Delta(\hat{b}_1, \hat{b}_2) = \sum_{n=1}^N |y_n - \hat{a}_1 f(x_n \hat{b}_1) - \hat{a}_2 f(x_n \hat{b}_2)|,$$

где черта сверху означает суммирование по индексу n .

Задавая в (4.) значения \hat{b}_1 и \hat{b}_2 из области их определения, можно получить \hat{a}_1 и \hat{a}_2 . Подставляя их в выражения для функционала $\Delta(\hat{b}_1, \hat{b}_2)$ и вычисляя, можно определить точку поверхности функционала в двумерном пространстве \hat{b}_1, \hat{b}_2 . Перебирая все значения \hat{b}_1 и \hat{b}_2 из области определения, можно получить полную поверхность функционала. Минимум поверхности функционала определяет решение, то есть оценочные параметры $\hat{a}_1, \hat{a}_2, \hat{b}_1, \hat{b}_2$.

Функционал $\Delta(\hat{b}_1, \hat{b}_2)$ инвариантен относительно перестановки $\hat{b}_1 \rightarrow \hat{b}_2$ и $\hat{b}_2 \rightarrow \hat{b}_1$. Следовательно, поверхность функционала будет содержать два зеркально симметричных минимума. На иллюстрациях максимумы смотрятся лучше, чем минимумы. В связи с этим, при модельных исследованиях для нахождения минимумов поверхности функционала будет использоваться обратный нормированный функционал:

$$\Delta 1(\hat{b}_1, \hat{b}_2) = \frac{1}{\left| 1 - \frac{\hat{a}_1 f(x_n \hat{b}_1) - \hat{a}_2 f(x_n \hat{b}_2)}{y_n} \right|^2}. \quad (5.)$$

В этом случае значения функционала будут изменяться от 1 до ∞ , в зависимости от дисперсии шума.

Рассмотрим с помощью модельных расчетов решение задачи разрешения двух сигналов ФМР методом максимального правдоподобия. В модельных расчетах зададим следующие значения параметров: $a_1 = 10, a_2 = 12, b_1 = 100, b_2$ – переменная величина, приближающаяся к значению b_1 . Количество точек обработки $N = 400$, интервал между отсчетами – $\Delta x = 0,5$. Разрешающая способность метода обработки определяется выражением:

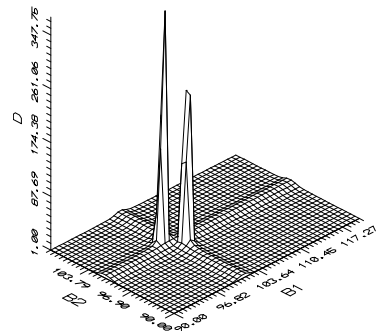
$$A = \frac{b_1 + b_2}{2|b_1 - b_2|}. \quad (6.)$$

Коэффициент корреляции определяется выражением:

$$R = \frac{\sum_{n=1}^N s_1(\vec{\lambda}, x) s_2(\vec{\lambda}, x)}{\left(\sum_{n=1}^N |s_1(\vec{\lambda}, x)|^2 \sum_{n=1}^N |s_2(\vec{\lambda}, x)|^2 \right)^{1/2}}. \quad (7.)$$

При отношении сигнал/шум 20 дБ и коэффициенте корреляции двух сигналов ФМР $R = 0,02$, сигналы практически ортогональны. В этом случае классический метод обработки (2.) и метод максимального правдоподобия (4.) дают практически одинаковые решения. Если сближать относительные частоты, приближая b_2 к b_1 , тогда коэффициент корреляции начинает увеличиваться, что будет указывать на степень неортогональности сигналов ФМР. При достижении определенной границы классический метод не будет решать задачу разрешения двух сигналов, а метод максимального правдоподобия будет давать информацию о параметрах сигнала.

На рис. 1 показана суперпозиция двух сигналов ФМР с относительными частотами $b_1 = 100, b_2 = 102$, амплитудные



значения оставлены теми же самыми. В этом случае коэффициент корреляции $R = 0,49$, а разрешающая способность – $A = 50,5$. На рисунке два сигнала ЯМР сливаются вместе. Визуально трудно определить наличие второго сигнала. На рис. 2 показан результат обработки классическим методом. Отмечается единственный максимум функционала, который дает следующие оценки параметров: $a_1 = 17,8, b_1 = 101,5$. Они не соответствуют модельным значениям. Задача разрешения двух сигналов ФМР оказывается не решенной.

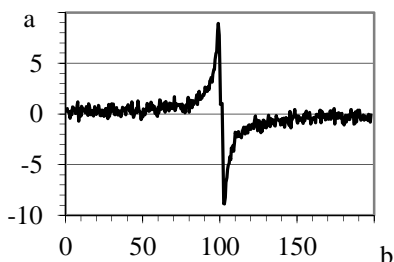


Рис. 1. Суперпозиция двух сигналов ЯМР

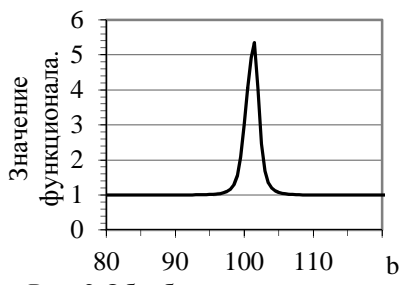


Рис. 2. Обработка классическим методом

Рис. 3. Поверхность функционала

На рис. 3 показана поверхность функционала, полученная при заданных параметрах методом максимального правдоподобия. Один из максимумов дает следующие оценки параметров двух сигналов ФМР: $a_1 = 10,15, a_2 = 12,15, b_1 = 100, b_2 = 102$. Задача разрешения двух сигналов ФМР оказывается решенной, а оценки параметров соответствуют модельным значениям.

При заданном интервале между отсчетами $\Delta x = 0,5$ сигналы ФМР по частоте можно сближать лишь до значения $b_2 = 101$. Приведем данные модельных расчетов для этого случая. Коэффициент корреляции $R = 0,79$, разрешающая способность $A = 100,5$. Максимум поверхности функционала позволяет определить следующие параметры: $a_1 = 10,37, a_2 = 11,81, b_1 = 100, b_2 = 101$. При этом начинают возрастать шумовые максимумы, и дальнейшее сближение частот окажется невозможным. Таким образом, предел разрешения двух сигналов ФМР в методе максимального правдоподобия будет определяться не критерием Релея (как в классике), а отношением сигнал/шум. При отношении сигнал/шум ~ 20 дБ разрешающая способность может быть увеличена дополнительно, если увеличить интервал между отсчетами Δx . Однако в спектрометрах интервал Δx не может быть уменьшен произвольно. Он должен быть равен интервалу корреляции шума на выходе спектрометра ФМР.

Если в принятом сообщении содержится лишь один сигнал ФМР, тогда классический метод по максимуму функционала дает следующие оценки сигнала: $a_1 = 10,22, b_1 = 100$, значение функционала в максимуме $\Delta 1 = 6,5$. Метод максимального правдоподобия в этом случае создает поверхность функционала с одним максимумом. Он дает следующие оценки

параметров: $a_1 = 10,18, a_2 = 0,37, b_1 = 100, b_2 = 105,5$, значение функционала $\Delta 1 = 6,58$. Признаком наличия в выборке данных одного сигнала ФМР является отсутствие зеркального максимума и малая амплитуда второго сигнала $a_2 = 0,37$ (на уровне шумовых максимумов). Функционалы правдоподобия в двух методах оценки параметров близки по своему значению. В таблице 1 представлены зависимости параметров сигналов ФМР от разности частот $\Delta f = b_2 - b_1$. Во втором столбце даны значения коэффициента корреляции R двух сигналов ФМР. В третьем столбце даны значения разрешающей способности A . Как видно из таблицы, метод максимального правдоподобия вполне работоспособен даже при коэффициенте корреляции $K = 0,79$. Относительные частоты b_1 и b_2 определяются с высокой точностью, а относительные амплитуды оцениваются с точностью $1,5 \div 7,3 \%$. Классический метод уже при коэффициенте корреляции $R = 0,18$ оценивает амплитуды с точностью $17 \div 25 \%$.

Таблица 1. Сравнение разрешающей способности

$$U_c/U_{\text{ш}} = 20 \text{ дБ}$$

Δf	R	A	Метод максимального правдоподобия				Классический метод				
			a_1	b_1	a_2	b_2	a_1	b_1	a_2	b_2	
15	0,0047	7,3	10,22	100,0	11,97	115,0	10,28	100,0	12,01	115,0	
12	0,014	8,	10,22	100,0	12,26	112,0	10,39	100,0	12,41	112,0	
10	0,026	10,5	10,23	100,0	11,77	110,0	10,53	100,0	12,05	110,0	
8	0,046	13	10,22	100,0	11,97	108,0	10,78	100,0	12,44	108,0	
6	0,088	17	10,19	100,0	12,31	106,0	11,28	100,0	13,22	106,0	
4	0,18	25	10,19	100,0	12,16	104,0	12,5	100,0	14,09	104,0	
3	0,29	33	10,22	100,0	11,99	103,0	14,13	100,5	15,23	102,5	
2	0,49	50,5	10,15	100,0	12,15	102,0	17,84	101,5	-	-	
1	0,79	100,5	10,37	100,0	11,81	101,0	20,83	100,5	-	-	
$\Delta x=0,25$	1	0,79	100,5	9,98	100,0	12,31	101,0	20,88	100,5	-	-
	0,5	0,86	133	9,95	100,0	12,32	100,75	21,45	100,5	-	-
	0,75	0,93	200,5	9,98	100,0	12,37	100,5	21,89	100,25	-	-

При $R = 0,49$ классический метод не может решить задачу разрешения даже с большой погрешностью в оценке параметров. В последних трех строках таблицы дана информация о параметрах сигналов ФМР при обработке с уменьшенным до $\Delta x = 0,25$ интервалом между отсчетами. Даже при разности частот между отсчетами $\Delta f = 0,5$ – результаты оценок параметров сигналов ФМР методом максимального правдоподобия удовлетворительные.

Следует отметить, что разработанная методика, основанная на информации о линии Лоренца, не позволяет получить оценки поглощения сигналов ФМР. Амплитуда и частота в линии Лоренца являются относительными ($a = \frac{U}{\alpha}$, $b = \frac{\omega}{\alpha}$). При изменении коэффициента поглощения α меняются как параметр a , так и параметр b сигнала ФМР. Это воспринимается как изменение амплитуды и частоты сигнала ФМР. Это недостоверная информация.

Для оценки коэффициента затухания сигнала ФМР мнимой части спектра экспоненциально затухающего сигнала недостаточно. Мнимая часть спектра определяет линию поглощения:

$$S(\vec{\lambda}, x) = \frac{U_0}{\alpha \left(1 + \left(\frac{\omega_0 - \omega}{\alpha}\right)^2\right)} = \frac{a}{(x-b)^2 + 1}. \quad (8)$$

В аналитическом выражении для линии поглощения (8.) параметрами также являются относительная амплитуда a и относительная частота b . Извлечь из (8.) информацию о коэффициенте поглощения достаточно сложно. В ФМР спектроскопии информация о коэффициенте поглощения определяется или по ширине линии поглощения (8.), или по виду логарифма огибающей экспоненциально затухающего сигнала. Такая методика приемлема для одиночного сигнала ФМР. Однако она недостаточна для оценки поглощения при суперпозиции двух или более сигналов ФМР с разными коэффициентами поглощения. В данных модельных исследованиях приведены результаты, полученные при одинаковых коэффициентах затухания двух сигналов ФМР. Исследования возможностей обработки сигналов ФМР с различными коэффициентами затухания будут проведены в следующих работах.

Рассмотрим с помощью модельных расчетов помехоустойчивость метода максимального правдоподобия при обработке суперпозиции сигналов ФМР. При моделировании зададим следующие параметры двух сигналов ФМР: $a_1 = 10$, $a_2 = 12$, $b_1 = 100$, $b_2 = 102$. Интервал между отсчетами – $\Delta x = 0,5$. Амплитуда шума меняется, определяя зависимость решения от отношения сигнал/шум. В соответствии с таблицей 1, при различии в частотах $b_2 - b_1 = 2$, разрешающая способность метода – $A = 50,5$, и классический метод обработки сигналов ФМР не может решить задачу разрешения.

На рис. 4 показан исходный сигнал (линия Лоренца), полученный при отношении сигнал/шум ~ 14 дБ.

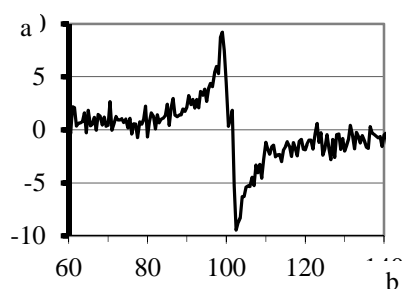


Рис. 4. Суперпозиция двух сигналов ЯМР

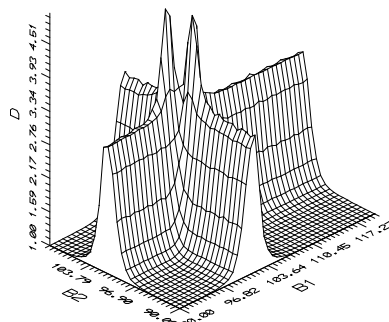


Рис. 5. Поверхность функционала

Шумовая дорожка хорошо видна и существенно затрудняет обнаружение второго сигнала ФМР. На рис. 5 показана поверхность функционала правдоподобия. Уровень пьедестала и максимумов, вследствие понижения отношения сигнал/шум, уменьшился до значения ~ 3 для пьедестала и $\sim 5,5$ для максимума. Однако оценки параметров сигналов ФМР достаточно хорошие: $a_1 = 10,25$, $a_2 = 12,47$, $b_1 = 100$, $b_2 = 102$.

Таблица 2. Исследование помехоустойчивости

$A = 50,5$ $R = 0,46$

$U_c/U_{\text{ш}}$ (дБ)	Метод максимального правдоподобия				Классический метод	
	a_1	b_1	a_2	b_2	a_1	b_1
40	10,01	100,0	12,02	102,0	17,4	101,25
26	10,06	100,0	12,11	102,0	17,59	101,25
20	10,12	100,0	12,23	102,0	17,75	101,25
14	10,25	100,0	12,47	102,0	18,08	101,25
10	10,38	100,0	12,7	102,0	18,43	101,5
6	10,63	100,0	13,18	102,0	19,1	101,5
3	9,1	99,75	15,23	101,75	19,78	101,5
0	9,35	99,75	16,1	101,75	20,79	101,5
-3,5	9,77	99,75	17,56	101,75	22,48	101,5

В таблице 2 представлены данные расчетов, позволяющие оценить количественно эффективность обработки. Из таблицы следует, что метод максимального правдоподобия обеспечивает оценку параметров двух сигналов ФМР при отношении сигнал/шум до $-3,5$ дБ и коэффициентом корреляции между ними $- R = 0,46$.

Список литературы

1. Бородин П. М. (ред.). Ядерный магнитный резонанс. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1982.
2. Марпл С. Л.-мл. Цифровой спектральный анализ и его приложения: – М.: Мир, 1990.
3. Перов А. И. Статистическая теория радиотехнических систем. Учеб. пособие для ВУЗов. – М.: Радиотехника, 2003, 400 с.
4. Тихонов В. И. Оптимальный прием сигналов. – М.: Радио и связь, 1983. – 320 с.
5. Пахотин В. А., Бессонов В. А., Молостова С. В., Власова К. В. Теоретические основы оптимальной обработки сигналов: курс лекций для радиотехнических специальностей. – Калининград: Изд-во РГУ им. И. Канта, 2008. 189 с.

Рецензенты:

Волхонская Е. В., д.т.н., профессор кафедры теоретических основ радиотехники Балтийской государственной академии рыбопромыслового флота, г. Калининград.

Захаров В. Е., д.ф.-м.н., профессор, зав. кафедрой радиофизики и информационной безопасности Балтийского федерального университета им. И. Канта, г. Калининград.