

## ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ НАКЛАДНЫХ МАГНИТОСТРИКЦИОННЫХ УРОВНЕМЕРОВ

Карпухин Э. В.<sup>1</sup>, Демин С. Б.<sup>1</sup>, Дюдюкин А. А.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>ФГБОУ ВПО «Пензенская государственная технологическая академия»

<sup>2</sup>ФГБОУ ВПО «Пензенский государственный университет архитектуры и строительства»

---

В данной статье введено понятие нового подкласса устройств измерения уровня – накладных магнито-стрикционных преобразователей уровня (МПУ). Сформулирована и решена задача поиска оптимальной ширины немагнитной стенки резервуара накладных МПУ (НМПУ), при которой напряженность его магнитного поля подмагничивания будет достаточной для формирования ультразвуковой волны кручения в среде его звукопровода. Для этого рассмотрен способ получения системы конечно-разностных уравнений для расчета магнитных полей НМПУ и показан эффективный численный метод её решения. Этот метод реализован в виде комплекса программ для расчета магнитных полей НМПУ и с его помощью проведено математическое моделирование рассматриваемых устройств. Показано, что использование данного метода позволяет сократить число итераций приблизительно в 50 раз при неизменной точности вычислений.

---

Ключевые слова: магнито-стрикционные преобразователи уровня, численные методы, математическое моделирование.

## NUMERICAL MODELLING MAGNETIC FIELDS OF PLATED MAGNETOSTRICTIVE CONVERTERS OF LEVEL

Karpukhin E. V.<sup>1</sup>, Demin S. B.<sup>1</sup>, Dyudyukin A. A.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Penza State Technological Academy

<sup>2</sup>Penza State University of Architecture and Construction

---

In given article the concept of a new subclass of devices of measurement a level – plated magnetostrictive converters of a level (MCL) is entered. The problem of search a optimum width of not magnetic wall of the tank plated MCL at which intensity of its magnetic field will be sufficient for formation of a ultrasonic wave of torsion in its environment is formulated and solved. For this purpose the way of reception of system certainly equations for calculation of magnetic fields plated MCL type is considered and the effective numerical method of its decision is shown. This method is realized in the form of a complex of programs for calculation of magnetic fields of waybills MCL and with its help mathematical modelling considered devices is lead. It is shown, that use of the given method allows to reduce number of iterations approximately in 50 times at constant accuracy of calculations.

---

Keywords: magnetostrictive converters of level, numerical methods, mathematical modeling.

### Введение

Современные условия развития промышленности привели к наличию большого разнообразия приборов для измерения и контроля уровня. Требования, предъявляемые к ним, весьма различны и зависят от области применения. Однако главными из них остаются высокая точность и разрешающая способность, возможность работы с агрессивными средами, низкая стоимость и относительная простота конструкции. Всем этим требованиям удовлетворяют МПУ, в частности, новый подкласс устройств – МПУ накладного типа на крутильных волнах.

Отличительной особенностью НМПУ является применение бесконтактного метода измерения уровня. Передача информации в них происходит посредством взаимодействия через немагнитную стенку резервуара магнитного поля постоянного магнита напряженностью

$H_{0.п}$  с магнитным полем магнитоstrictionного звукопровода с током. В результате этого взаимодействия в среде последнего формируется ультразвуковая волна кручения, которая далее считывается сигнальным электроакустическим преобразователем [2].

Выбор ширины  $H$  немагнитной стенки резервуара, где устанавливается НМПУ, влияет на эффективность его работы, что является важной задачей, решение которой позволяет добиться улучшения их характеристик.

### Постановка задачи

С целью улучшения технических и эксплуатационных характеристик НМПУ возникает задача поиска оптимальной ширины  $H$  немагнитной стенки резервуара при их использовании, при которой напряженность  $H_{0.п}$  его магнитного поля подмагничивания будет достаточной для формирования ультразвуковой волны кручения в среде его звукопровода. С целью выявления такой зависимости, в данной статье проведен расчет магнитного поля НМПУ с применением эффективных численных методов и реализованных в виде программы для ЭВМ.

### Методы испытаний

Для решения поставленной задачи предлагается применить численные методы решения системы уравнений Максвелла, описывающей распределение магнитного поля в любой точке пространства [1, 3]. Известно, что электромагнитное поле определяется векторами магнитной индукции  $\bar{B}$ , напряженностей электрического  $\bar{E}$ , магнитного  $\bar{H}$  полей и электрического смещения  $\bar{D}$ , связанных между собой следующей системой [2]:

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \bar{H} = \bar{j} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}; \\ \operatorname{rot} \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}; \\ \operatorname{div} \bar{D} = \rho; \\ \operatorname{div} \bar{B} = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где  $\bar{D} = \epsilon_0 \epsilon \bar{E}$ ,  $\bar{B} = \mu_0 \mu \bar{H}$ ,  $\bar{j} = \gamma \bar{E}$  – плотность тока проводимости,  $\epsilon_0, \mu_0$  – электрическая и магнитная постоянные,  $\epsilon, \mu$  – диэлектрическая и магнитная проницаемости среды,  $\gamma$  – удельная проводимость вещества,  $\rho$  – объемная плотность электрического заряда.

Рассматриваемое магнитное поле подмагничивания НМПУ является стационарным, поэтому в (1) можно принять:

$$\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} = \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} = 0. \quad (2)$$

С учетом этого система (1) может быть сведена к одному из следующих уравнений в частных производных [3]:

$$\operatorname{div}(\mu \operatorname{grad} u_M) = -\rho_{\text{м.ст}}; \quad (3)$$

$$\operatorname{div}(\mu^{-1} \operatorname{grad} \bar{A}) = -\operatorname{rot} \bar{H}, \quad (4)$$

где  $u_M$  – обобщенный скалярный магнитный потенциал ( $\bar{H} = -\operatorname{grad} u_M$ ),  $\bar{A}$  – векторный магнитный потенциал ( $\bar{B} = \operatorname{rot} \bar{A}$ ),  $\rho_{\text{м.ст}} = -\operatorname{div} \mu \bar{H}$  – плотность сторонних источников магнитного поля.

Уравнения (3), (4) справедливы в любой точке расчетной области, так что их непосредственное решение с учетом граничных и краевых условий точно определяют потенциал  $\bar{A}$  и напряженность  $H_{\text{о.п}}$  магнитного поля НМПУ в рассматриваемой точке. Анализ этих уравнений показывает, что удобнее решать одно уравнение в частных производных (3). Однако введение скалярного потенциала  $u_M$  возможно лишь в областях, где отсутствуют токи проводимости  $\bar{j}$ , что делает его непригодным для расчета магнитного поля НМПУ.

В силу нелинейности и анизотропности свойств ферромагнитных материалов такие характеристики как  $\epsilon, \mu, \gamma$  являются нелинейными и зависят от различных параметров. Это существенно усложняет аналитическое интегрирование (4). Однако существует множество различных методов численного решения подобных уравнений до любой заданной точности с использованием ЭВМ [3].

Наиболее эффективным является переход от рассматриваемого уравнения в частных производных к разностному, являющемуся его дискретным аналогом, например, методу сеток [1, 5]. Для этого необходимо выбрать систему узлов (сетку), заполняющую расчетную область, исходя из следующих условий: получения меньших погрешностей при переходе к разностному уравнению и простого разностного уравнения. На вычислительную погрешность, в этом случае, будет в наибольшей степени влиять расстояние между узлами (шаг  $h$ ) сетки.

Как показано в [3], разностные уравнения принимают более простой вид при выборе регулярной сетки. Введение нерегулярных сеток оправдано при решении задач с границами объектов сложной геометрической формы. В рассматриваемом случае объекты ограничены прямыми линиями, поэтому эффективным будет использование регулярной сетки.

Преобразуем уравнение (4) в частных производных в – соответствующее ему разностное. В этом случае разностные уравнения для потенциала внутри сред дополняются уравне-

ниями другого вида на границах их раздела (граничные условия), что приведет к усложнению алгоритма решения из-за необходимости идентификации каждой точки сетки на принадлежность её к границе. Этого можно избежать, применяя метод баланса [3], суть которого состоит в том, что при расчете статического магнитного поля в кусочно-неоднородной среде следует с помощью постулата Максвелла выразить вектор  $\vec{B}$  через векторные потенциалы узлов сетки и рассчитать приближенно полученный интеграл.

Методом баланса получим разностное уравнение, соответствующее уравнению (4) в частных производных. Для этого рассмотрим фрагмент из четырех смежных ячеек сетки (рисунок 1) и выберем в центрах каждой из них точки  $a, b, c, d$ .

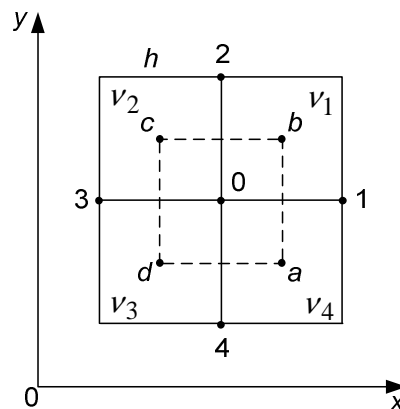


Рисунок 1. Контур интегрирования  $abcd$  для получения разностных уравнений:  $v_1, v_2, v_3, v_4$  – коэффициенты, обратные средним значениям магнитной проницаемости каждой ячейки, с узлами 0, 1, 2, 3, 4 расчетной области

Уравнение системы (1) с учетом выражения (2) можно переписать в виде:

$$\oint_l \vec{H} dl = \oint_l v \vec{B} dl = i, \quad (5)$$

где  $l$  – контур  $abcd$ ,  $v = \mu^{-1}$ ,  $i$  – ток проводимости среды.

Интеграл (5) вдоль контура  $abcd$  представим в виде суммы:

$$\oint_l v \vec{B} dl = \int_a^b v B_y dy - \int_b^c v B_x dx - \int_c^d v B_y dy + \int_d^a v B_x dx. \quad (6)$$

Выберем шаг сетки достаточно малым, позволяя считать касательную составляющую индукции  $\vec{B}$  постоянной в пределах отрезков интегрирования. В этом случае выражение (6) запишется в виде:

$$B_{yab} \int_a^b v dy - B_{xbc} \int_b^c v dx - B_{ydc} \int_c^d v dy + B_{xda} \int_d^a v dx = jh = i, \quad (7)$$

где  $j$  – средняя по четырём ячейкам плотность тока.

Поскольку  $v = v(x, y)$  является некоторой функцией, то для вычисления определенных интегралов в (7) можно использовать приближенные вычисления, например, метод парабол [1, 5]. Его применение к первому интегралу выражения (7) позволяет записать:

$$\int_a^b v dy \approx \frac{h}{2}(v_1 + v_4). \quad (8)$$

Отметим также, что касательная составляющая вектора индукции  $B_n$  на каждом отрезке интегрирования с учетом (4) выражается через векторные магнитные потенциалы  $A_i$  смежных ячеек в соответствии с выражениями [3]:

$$\begin{aligned} B_{yab} &= -\frac{A_1 - A_0}{h}; & B_{xbc} &= \frac{A_2 - A_0}{h}; \\ B_{ycd} &= -\frac{A_0 - A_3}{h}; & B_{xda} &= \frac{A_0 - A_4}{h}. \end{aligned} \quad (9)$$

Получим приближения для остальных интегралов аналогичные (8), с учетом выражений (4)–(6) и (9) из (7), осуществляя группировку коэффициентов подобных слагаемых:

$$\begin{aligned} &A_1 \frac{v_4 + v_1}{2} + A_2 \frac{v_1 + v_2}{2} + A_3 \frac{v_2 + v_3}{2} + A_4 \frac{v_3 + v_4}{2} - A_0 \frac{v_1 + v_2 + v_3 + v_4}{2} = \\ &= A_1 k_1 + A_2 k_2 + A_3 k_3 + A_4 k_4 - A_0 (k_1 + k_2 + k_3 + k_4) = -i, \end{aligned} \quad (10)$$

где  $k_1 = \frac{v_4 + v_1}{2}$ ,  $k_2 = \frac{v_1 + v_2}{2}$ ,  $k_3 = \frac{v_2 + v_3}{2}$ ,  $k_4 = \frac{v_3 + v_4}{2}$ .

Полученное выражение (10) является конечно-разносным уравнением для узла 0. Такие уравнения могут быть записаны для всех узлов сетки, кроме тех, что лежат на границе расчетной области, поскольку поведение магнитного поля в таких точках известно и определяется граничными условиями. Такой подход позволяет получить систему алгебраических уравнений, являющуюся разностной аппроксимацией решения (4) системы уравнений Максвелла (1) для магнитного поля НМПУ.

Система уравнений (10) связывает потенциалы в узлах равномерной сетки с заданным шагом  $h$ . Ее анализ позволяет выделить некоторые особенности, которые необходимо учесть при выборе метода решения:

- число граничных и краевых условий определяет точность (погрешность) вычислений потенциалов магнитного поля;
- способ нумерации узлов сетки определяет вид матрицы коэффициентов;
- при большом числе неизвестных матрица коэффициентов системы является разреженной, плохо обусловленной и симметричной. Однако её симметричность может быть нарушена вблизи границ расчетной области (наличие граничных и краевых условий).

В последнем случае целесообразным будет выполнить алгебраические преобразования матрицы с целью приведения её к прежнему виду, из-за оптимальности обработки и хранения на ЭВМ [1, 5].

Для решения систем алгебраических уравнений, обладающих указанными свойствами, целесообразно использовать итерационные численные методы [3]. Их суть состоит в том, что значение искомой величины, полученное на предыдущем шаге, позволяет вычислить другое, более точное, на текущем шаге. Процесс повторяется до тех пор, пока не выполнится некоторый критерий точности. Преимуществами данных методов являются относительная простота итерационных формул, удобство при реализации на ЭВМ, гарантированное достижение результата с требуемой точностью вне зависимости от принятых начальных значений искомых величин.

Принимая это во внимание, запишем систему уравнений вида (10) в матричной форме:

$$Au = P, \quad (11)$$

где  $A = \|a_{i,j}\|$  – матрица коэффициентов системы,  $u$  – матрица неизвестных,  $P$  – столбец правых частей.

Для решения уравнений (11) применим метод Зейделя [1, 5], высокая скорость сходимости которого объясняется быстротой вычислительного процесса.

Применительно к рассматриваемой системе (11) формула Зейделя может быть записана в следующем виде [3]:

$$\tilde{u}_{i,j}^{n+1} = \frac{a_{i,j-1}u_{i,j-1}^{n+1} + a_{i-1,j}u_{i-1,j}^{n+1} + a_{i,j+1}u_{i,j+1}^n + a_{i+1,j}u_{i+1,j}^n - P_i}{\sum_{i,j} a_{i,j}}, \quad (12)$$

где  $u_{i,j}^n$  – значения неизвестных  $u_{i,j}$ , вычисленные на  $n$ -ом шаге,  $\tilde{u}_{i,j}^{n+1}$  – уточненные значения неизвестных  $u_{i,j}$ .

Здесь и далее считаем, что начальное приближение  $u_{i,j}^0$  известно.

Метод Зейделя позволяет получить решение системы уравнений (11) с любой заранее определенной точностью  $\varepsilon$ . В качестве критерия достижения заданной точности  $\varepsilon$  используется условие [1, 5]:

$$\max |\tilde{u}^{n+1} - \tilde{u}^n| \leq \varepsilon. \quad (13)$$

Использование метода Зейделя позволяет уменьшить объем памяти ЭВМ для хранения исходных данных и вычисленных результатов в виде одного массива.

Еще большую скорость сходимости обеспечивают методы верхней или нижней релаксации [3], являющиеся модификацией метода Зейделя. Итерационный процесс в них построен на использовании выражения:

$$u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^n + \bar{\omega}(\tilde{u}_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n), \quad (14)$$

где  $\bar{\omega}$  – коэффициент ускорения сходимости.

Оптимальное значение коэффициента  $\bar{\omega}_0$  ускорения сходимости может быть определено приближенно. Например, для прямоугольной сетки размером  $(N+1) \times (M+1)$ , где  $N > 14$ ,  $M > 14$  и матрицы коэффициентов с  $\chi \gg 1$ , справедливо следующее выражение [3]:

$$\bar{\omega}_0 = 2 \left( 1 - \pi \sqrt{\frac{1}{M^2} + \frac{1}{N^2}} \right). \quad (15)$$

Таким образом, в соответствии с выражением (15), для сетки любого размера может быть выбрано значение коэффициента  $\bar{\omega}_0$  ускорения сходимости, которое при подстановке в выражение (14) позволит за наименьшее количество итераций определить значения потенциалов во всех узлах расчетной области по методу верхней релаксации ( $\bar{\omega}_0 > 1$ ) с заданной точностью  $\varepsilon$ .

Отметим, что существуют и другие, более сложные итерационные методы решения систем уравнений вида (11), например метод Ричардсона, попеременно-треугольный метод и другие [1–3]. Однако применение их для решения данной системы уравнений является нецелесообразным в силу их ориентированности на задачи расчета трехмерных полей со сложной геометрией, что лишь внесет дополнительные трудности при составлении программы для ЭВМ их реализации.

### **Результаты вычислительного эксперимента и их обсуждение**

Результатом данной работы является программа, позволяющая получать картину напряженности  $H_{o,\Pi}$  магнитного поля подмагничивания НМПУ типа в точках расчетной области (рисунок 2). Преимуществом этой программы перед существующими аналогами является возможность получения непрерывной зависимости напряженности  $H_{o,\Pi}$  магнитного поля постоянного магнита 3, в точке магнотрикссионного звукопровода 5, вблизи поплавок 4, от ширины немагнитной стенки Н резервуара 1. Программа позволяет находить указанные зависимости для любых геометрических размеров расчетной области и материалов элементов НМПУ.

Для расчета характеристик поля составляется система конечно-разностных уравнений (10) по методу баланса и решается методом верхней релаксации с выбором оптимального значения  $\bar{\omega}_0$  по формуле (15).

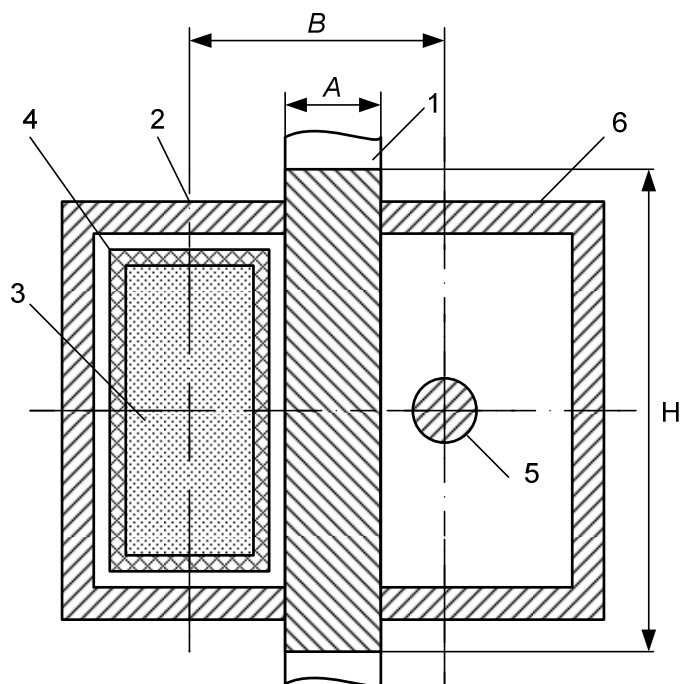


Рисунок 2. Расчетная схема НМПУ:

- 1 – резервуар с немагнитной стенкой шириной  $H$ , 2 – направляющий паз,  
3 – постоянный магнит, 4 – корпус поплавка, 5 – звукопровод,  
6 – электромагнитный экран,  $A$  – толщина немагнитной стенки резервуара 1,  $B$  – осевое расстояние между постоянным магнитом 3 и звукопроводом 5 НМПУ

Программа ориентирована на интеграцию в систему MATLAB, и результатом её работы является m-файл, включающий программу и числовые данные для указанной системы.

В результате расчета магнитного поля НМПУ с помощью разработанной программы были получены расчетные зависимости напряженности  $H_{0,п}$  магнитного поля постоянного магнита 3 от ширины  $H$  немагнитной стенки резервуара 1, для разных магнито жестких материалов (рисунок 3).



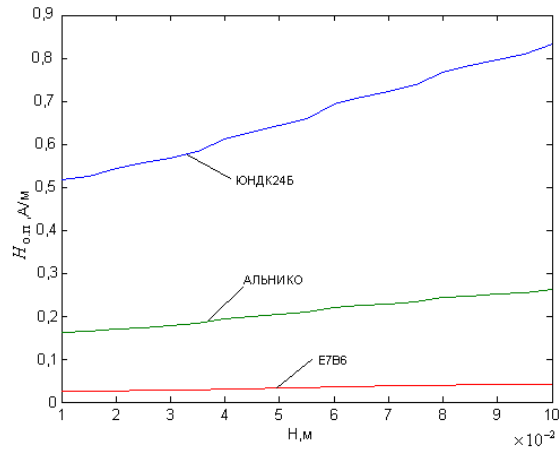


Рисунок 3. Зависимость напряженности  $H_{0,п}$  магнитного поля постоянного магнита 3 от ширины  $N$  немагнитной стенки резервуара 1 НМПУ

На рисунке 4 приведены результаты расчетов магнитного поля НМПУ, при выборе в качестве постоянного магнита сплава ЮНДК24Б.

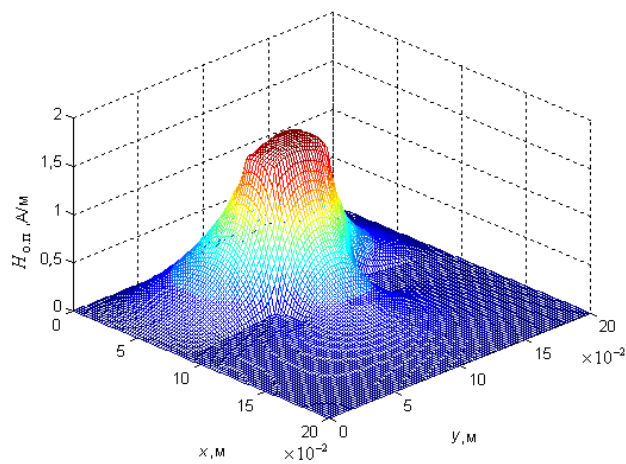


Рисунок 4. Картина напряженности  $H_{0,п}$  магнитного поля НМПУ

Для проверки эффективности метода верхней релаксации со значением коэффициента ускорения сходимости  $\bar{\omega}_0$ , рассчитанным по формуле (15), было подсчитано число итераций, необходимых для достижения требуемой точности  $\varepsilon$  при различных значениях  $\bar{\omega}$  (рисунок 5).

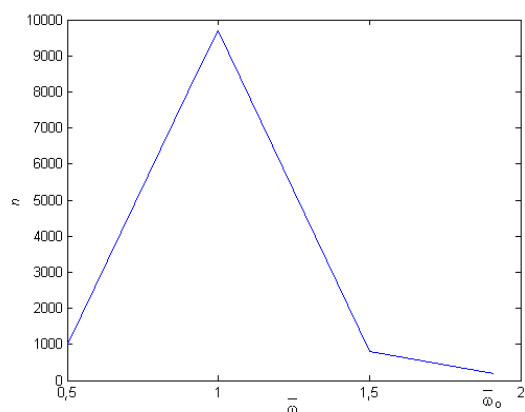


Рисунок 5. Зависимость числа итераций  $n$  от коэффициента ускорения сходимости  $\bar{\omega}$

В ходе данного вычислительного эксперимента коэффициент  $\bar{\omega}$  из выражения (14) принимал значения: 0,5; 0,9; 1; 1,5;  $\bar{\omega}_0$  (коэффициент  $\bar{\omega}_0$  вычислялся по формуле (15)). Как видно из рисунка 5, введение коэффициента ускорения сходимости  $\bar{\omega}$  позволяет существенно снизить число требуемых итераций по сравнению с методом Зейделя (при  $\bar{\omega} = 1$ ). Однако наилучший результат может быть достигнут в случае выбора оптимального значения  $\bar{\omega}_0$ , позволяющего решить задачу за минимальное число итераций.

### Выводы

Таким образом, сформулированная задача поиска оптимальной ширины  $H$  немагнитной стенки резервуара 1 НМПУ, решается путем использования конечно-разностной аппроксимации системы Максвелла. В статье показан способ получения таких уравнений на основе метода сеток и подробно рассмотрен оптимальный метод их численного решения.

Результаты математического моделирования магнитного поля НМПУ с применением разработанной программы дают возможность определить оптимальное значение ширины его немагнитной стенки  $H$  резервуара 1, при которой напряженность продольного магнитного поля постоянного магнита  $H_{o,п}$  будет достаточной для формирования ультразвуковой волны кручения в среде магнитострикционного звукопровода.

Введение коэффициента  $\bar{\omega}_0$ , вычисленного по приближенной формуле (15), позволяет сократить число требуемых итераций приблизительно в 50 раз. Это существенно снижает требования программы к ресурсам ЭВМ, сокращает время решения задачи и позволяет получать результаты с высокой точностью.

### Список литературы

1. Бахвалов Н. С. Численные методы / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков. – М.: Бинوم, 2003. – 632 с.

2. Бессонов Л. А. Теоретические основы электротехники. Электромагнитное поле. – М.: Высшая школа, 1978. – 231 с.

3. Демирчян К. С. Машинные расчеты электромагнитных полей / К. С. Демирчян, В. Л. Чечурин. – М.: Высш. школа, 1986. – 240 с.

4. Карпухин Э. В. Моделирование магнитных полей магнитострикционных преобразователей перемещений / Э. В. Карпухин, С. Б. Демин, А. А. Воронцов, Н. А. Ермолаев // Наука и образование. – 2011: Сб. статей международной НТК. – Мурманск: МГТУ, 2011. – С. 85-91.

5. Самарский А. А. Численные методы / А. А. Самарский, А. В. Гулин. – М: Наука, 1989. – 432 с.

**Рецензенты:**

Султанов Б. В., д.т.н., профессор кафедры «Информационная безопасность систем и технологий» Пензенского государственного университета, г. Пенза.

Слесарев Ю. Н., д.т.н., профессор кафедры «Прикладная математика и информатика» Пензенского государственного педагогического университета им. В. Г. Белинского, г. Пенза.