

УДК 004.942:532.593.4

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СПИРАЛЬНЫХ ВОЛН НА ПОВЕРХНОСТИ ЖИДКОСТИ, ВОЗНИКАЮЩИХ ОТ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ИСТОЧНИКА В ФОРМЕ ДУГИ ОКРУЖНОСТИ

Белов А.Н.

ФГБОУ ВПО «Тверской государственный университет», Тверь, Россия (170000, г. Тверь, ул. Желябова, 33), phystech_belov@mail.ru

Моделируется волновая картина на поверхности жидкости, генерируемая атмосферным вихрем. В качестве математической модели рассматриваются длинные гравитационные волны, вызываемые вращением источника в форме дуги окружности. Решено двумерное волновое уравнение, правая часть которого описывает источник. Получено аналитическое выражение для динамики возвышения свободной поверхности жидкости. Решение представляет собой бесконечный сходящийся ряд, содержащий цилиндрические функции. Показана физическая адекватность решения и обсужден ряд его свойств (асимптотика, линии уровня, скорость сходимости). Установлено, что волновая картина представляет собой волны спиралевидной формы. Приведены примеры численного моделирования волновой картины в системе аналитических вычислений Maple.

Ключевые слова: спиральные волны, вращающийся источник, математическая модель атмосферного вихря.

MATHEMATICAL MODELLING OF SPIRAL WAVES AT THE LIQUID SURFACE GENERATED BY ROTATIONAL SOURCE ARC FORM

Belov A.N.

Tver State University, Tver, Russia (170000, Zhelyabova, 33), phystech_belov@mail.ru

Wave picture at the liquid surface generated by atmospheric vortex is modeling. Long gravitational waves generated by rotational source arc form is considered as mathematical model. Two-dimensional wave equation where source is described by right member is solved. Analytical expression for dynamics of free liquid surface is obtained. The solution is the infinite series with cylindrical functions. It is shown that solution is physically adequately. Some properties of solutions (asymptotics, isoline, convergence rate) is also discussed. It is established that wave picture is spiral waves. Numerical examples of modeling using MAPLE are represented.

Key words: spiral waves, rotational source, mathematical model of atmospheric vortex.

Введение

Настоящая статья продолжает работу в области разработки и исследования математической модели волновой картины, возникающей на поверхности жидкости при движении атмосферных вихрей (АВ). Самые большие вихри на Земле – атмосферные циклоны и антициклоны. Они оказывают значительное влияние на формирование погодных условий на больших территориях. Особый интерес представляют тропические циклоны – интенсивные вихри большой разрушительной силы, возникающие в тропических широтах. Прохождение тропического циклона сопровождается развитием гигантских ветровых волн, иногда достигающих в области штормового волнения высоты порядка нескольких десятков метров. Быстро меняющийся градиент давлений в области прохождения тропического циклона приводит к сложным интерференционным явлениям. Понятно, что наблюдение и анализ такой волновой картины является весьма трудной задачей. По мере того как ветровые волны распространяются в океанические области, далекие от места их зарождения, т.е. от области

штормового волнения, они постепенно превращаются в зыбь. Систему волн зыби называют системой главных волн тропического урагана.

В работе [1] описан эксперимент, поставленный на кафедре физики моря и вод суши МГУ. В ходе эксперимента [1] выяснено, что возникновение системы главных волн тайфуна может возникать из-за движения области повышенного давления (называемого барическим образованием). В [7; 10] построена математическая модель волновой картины на поверхности жидкости, генерируемой движением барического образования по окружности. Так, найдены [7; 10] выражения для возвышения свободной поверхности жидкости в случае движения точечного барического образования и в случае, если барическое образование представляет круг, содержащий область повышенного давления. В [2] решена задача о волнах, возникающих при движении центра вращения с постоянной скоростью.

С другой стороны, в [9] АВ рассматривается как вращающаяся воронка, способная перемещаться вдоль поверхности земли или океана. Центральную часть воронки называют «глазом». Форма глаза – круглая или эллиптическая. В области, близкой к стене глаза, вращательная скорость достаточно слабого АВ ~50 м/с, а для мощных торнадо она может достигать более 100 м/с (более 360 км/ч!). Физические соображения, качественно иллюстрирующие процесс образования таких интенсивных вихрей, их развитие, природу устойчивости, обсуждаются в [3]. Большие скорости вращения воронки и значительный градиент давления на внешних границах воронки позволяет рассматривать участок вращающейся стенки АВ как вращающуюся плотную дугу. Волны, вызываемые движением такого источника по окружности с постоянной скоростью, и являются предметом исследования в настоящей работе.

Постановка задачи. Используемые приближения

Рассматриваем однородную идеальную несжимаемую жидкость. Введем прямоугольную систему координат, где горизонтальный плоский уровень жидкости, находящийся в состоянии гидростатического равновесия, примем за плоскость XOY , а ось OZ направим вверх. Волновую картину будем описывать с помощью вертикальной координаты жидкости $\xi = \xi(x, y, t)$. Будем рассматривать длинные гравитационные волны, длина которых велика по сравнению с глубиной жидкости [6]. Тогда неоднородное волновое уравнение запишем в виде:

$$\Delta \xi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = F, \quad (1)$$

где c – скорость распространения волн, F – функция, описывающая источник. Ищем волны от источника в форме дуги окружности радиуса r_0 и угловым раствором φ_0 ,двигающимся с постоянной угловой скоростью ω . Постановку задачи иллюстрирует рис. 1.

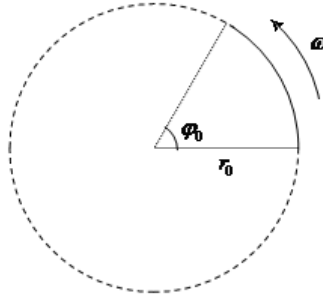


Рис. 1. Модельная постановка задачи. Источник в виде дуги окружности радиуса r_0 и углом раствора φ_0 вращается с постоянной угловой скоростью ω .

Введем полярную систему координат (r, φ) , начало которой совпадает с центром вращения. Запишем граничные условия. Полагаем, что на очень большом удалении от источника волн нет, т.е.

$$\xi(r, \varphi, t) \Big|_{r=\infty} = 0 \quad . \quad (2)$$

Также считаем известной скорость на внешней границе стенки $V(r_0) = V_0$. При моделировании положим, что скорость жидкости на внешней границе вращающейся стенки будет равна линейной скорости источника, $V_0 = \omega r_0$. В общем случае (выходящем за рамки настоящего исследования) можно рассмотреть и другие условия «прилипания» жидкости к вращающейся дуге.

Несомненно, процессы, происходящие внутри воронки, также представляют интерес, но в данной работе остановимся на случае волнового движения снаружи, т.е. на случае $r > r_0$. Не интересуясь переходным процессом, рассматриваем движение жидкости, когда прошло уже достаточно много времени с момента начала движения источника. Считаем, что в жидкости установилось движение с тангенциальной скоростью, а радиальная составляющая равна нулю.

Считаем, что волновая картина будет периодична с периодом $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

Возмущения, создаваемые вращающейся дугой, можно представить как последовательность прямоугольных импульсов, продолжительность которых зависит от угла раствора φ_0 . Разложение функции источника в ряд Фурье имеет вид [4]:

$$F = A \delta(r - r_0) \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} C_k e^{ik(\varphi - \omega t)}, \quad (3)$$

где A – некоторый размерный постоянный коэффициент, а коэффициенты ряда Фурье

$$C_k = V_0 \frac{\varphi_0}{2\pi} \cdot \frac{\sin k\varphi_0/2}{k\varphi_0/2}. \quad (4)$$

Точное решение задачи

В полярной системе координат уравнение (1) приобретает вид:

$$r\xi_r' + r^2\xi_{rr}'' + \xi_{\varphi\varphi}'' - \frac{r^2}{c^2}\xi_{tt}'' = AFr^2. \quad (5)$$

Разделяем переменные, запишем разложение в ряд Фурье (в соответствии с физическим смыслом задачи рассмотрена действительная часть разложения):

$$\xi(r, \varphi, t) = \operatorname{Re} \left(\sum_{k=-\infty}^{k=\infty} \xi_k(r) e^{ik(\varphi - \omega t)} \right) \quad (6)$$

и подставим в (5) с учетом (3). Получаем:

$$\xi_k''(r) + \frac{1}{r}\xi_k'(r) + \xi_k(r) \left(\frac{k^2\omega^2}{c^2} - \frac{k^2}{r^2} \right) = AV_0\delta(r - r_0)C_k. \quad (7)$$

При $k = 0$ из (7) получаем уравнение $\xi_0''(r) + \frac{1}{r}\xi_0'(r) = AV_0\delta(r - r_0)$. Из граничного условия (2)

и физического смысла задачи можно считать, что $\xi_0(r) = 0$.

Решим уравнение (7) для случая $k \neq 0$. Сделаем замену переменных (при $k \neq 0$):

$$x = \frac{\omega k}{c} r. \quad (8)$$

Тогда (7) примет вид (имеется в виду дифференцирование по новой переменной):

$$\xi_k''(x) + \frac{1}{x}\xi_k'(x) + \xi_k(x) \left(1 - \frac{k^2}{x^2} \right) = AV_0 \frac{c}{\omega k} C_k \delta \left(x - r_0 \frac{\omega k}{c} \right). \quad (9)$$

Если (9) было бы однородным, его частными решениями являлась бы функции Бесселя [8] порядка $\pm k$. Общее решение (9) будем искать в виде:

$$\xi_k(x) = A_k J_{|k|}(x) + \tilde{\xi}_k(x), \quad (10)$$

где $\tilde{\xi}_k(x)$ – частное решение, A_k – постоянный коэффициент. Значение A_k необходимо подобрать так, чтобы решение представляло собой убегающую волну. Частное решение уравнения (9) будем искать, используя преобразования Ганкеля [5]:

$$\tilde{\xi}_k(x) = \int_0^{\infty} \mu J_{|k|}(x\mu) h(\mu) d\mu. \quad (11)$$

Тогда уравнение (9) принимает вид:

$$\int_0^{\infty} \mu J_{|k|}(x\mu) (1 - \mu^2) h(\mu) d\mu = A \frac{c}{\omega k} V_0 C_k \delta \left(x - r_0 \frac{\omega k}{c} \right). \quad (12)$$

С помощью (12) будем искать $h(\mu)$. Применяя к (12) обратное преобразование

$$(1 - \mu^2) h(\mu) = \int_0^{\infty} \frac{c}{\omega k} AV_0 C_k \delta \left(x - r_0 \frac{\omega k}{c} \right) J_{|k|}(x\mu) x dx, \quad (13)$$

получаем

$$h(\mu) = AV_0 C_k r_0 J_{|k|} \left(\mu r_0 \frac{\omega k}{c} \right). \quad (14)$$

Результат (14) подставляем в (11), возвращаясь к переменной r :

$$\tilde{\xi}_k(r) = AV_0 C_k r_0 \int_0^{\infty} \mu J_{|k|} \left(\mu r \frac{\omega k}{c} \right) J_{|k|} \left(\mu r_0 \frac{\omega k}{c} \right) \cdot \frac{1}{1-\mu^2} d\mu. \quad (15)$$

Будем искать главное значение интеграла (15). Можно записать [4]:

$$J_{|k|} \left(r \frac{\omega k}{c} \right) = \frac{1}{2} \left(H_{|k|}^{(1)} \left(r \frac{\omega k}{c} \right) + H_{|k|}^{(2)} \left(r \frac{\omega k}{c} \right) \right) \quad (16)$$

Перепишем интеграл (15) с учетом (16), считая контуром интегрирования верхнюю полуокружность бесконечного радиуса:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4} \frac{\left(H_{|k|}^{(1)} \left(r \frac{\omega k}{c} \right) + H_{|k|}^{(2)} \left(r \frac{\omega k}{c} \right) \right) J_{|k|} \left(r_0 \frac{\omega k}{c} \xi \right)}{\xi^2 - 1} d\xi. \quad (17)$$

Сумма вычетов в точках $\xi = \pm 1$ подынтегральной функции в (17) равна $-J_{|k|} \left(r_0 \frac{\omega k}{c} \right) J_{|k|} \left(r \frac{\omega k}{c} \right) - \frac{1}{2} J_{|k|} \left(r_0 \frac{\omega k}{c} \right) N_{|k|} \left(r \frac{\omega k}{c} \right)$. Тогда значение искомого интеграла [5] будет равно:

$$2\pi \left(-J_{|k|} \left(r_0 \frac{\omega k}{c} \right) J_{|k|} \left(r \frac{\omega k}{c} \right) - i \frac{1}{2} J_{|k|} \left(r_0 \frac{\omega k}{c} \right) N_{|k|} \left(r \frac{\omega k}{c} \right) \right). \quad (18)$$

В соответствии с физическим смыслом и представлением (6) в виде ряда Фурье нас будет интересовать действительная часть (18):

$$\pi J_{|k|} \left(r_0 \frac{\omega k}{c} \right) N_{|k|} \left(r \frac{\omega k}{c} \right). \quad (19)$$

Результат (19) подставляем в выражение (15) (являющееся частным решением):

$$\tilde{\xi}_k(r) = \pi AV_0 C_k r_0 J_{|k|} \left(r_0 \frac{\omega k}{c} \right) N_{|k|} \left(r \frac{\omega k}{c} \right). \quad (20)$$

Исходя из физического смысла задачи, подберем значение A_k для случая убегаящей волны с учетом множителя C_k , учитывающего конечные размеры источника:

$$A_k = -iA\pi V_0 C_k r_0 J_{|k|} \left(r_0 \frac{\omega k}{c} \right). \quad (21)$$

Тогда в соответствии с (10) записываем общее решение (где уже возвратились к переменной r):

$$\xi(r) = A\pi V_0 C_k r_0 J_{|k|} \left(r_0 \frac{\omega k}{c} \right) \cdot \left(-i J_{|k|} \left(r_0 \frac{\omega k}{c} \right) + N_{|k|} \left(r \frac{\omega k}{c} \right) \right). \quad (22)$$

Учтем свойства отрицательных индексов цилиндрических функций [4]:

$$J_{-k}\left(r_0 \frac{\omega k}{c}\right) = (-1)^k J_k\left(r_0 \frac{\omega k}{c}\right), \quad (23)$$

$$J_{-k}\left(r \frac{\omega k}{c}\right) = (-1)^k J_k\left(r \frac{\omega k}{c}\right), \quad (24)$$

$$N_{-k}\left(r \frac{\omega k}{c}\right) = (-1)^k N_k\left(r \frac{\omega k}{c}\right). \quad (25)$$

Поэтому (22) можно переписать:

$$\xi(r) = A\pi V_0 C_k r_0 J_k\left(r_0 \frac{\omega k}{c}\right) \left(-iJ_k\left(r \frac{\omega k}{c}\right) + N_k\left(r \frac{\omega k}{c}\right) \right). \quad (26)$$

Подставляя найденное выражение (24) для $\xi(r)$ в ряд Фурье (6), получаем:

$$\xi(r, \varphi, t) = A\pi V_0 r_0 \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} C_k J_k\left(r_0 \frac{\omega k}{c}\right) \operatorname{Im}\left(H_k^{(1)}\left(r \frac{\omega k}{c}\right) e^{ik(\varphi - \omega t)} \right). \quad (27)$$

Перейдем в (27) к суммированию только по положительным индексам, используя для этого (23)-(25), соотношение $C_{-k} = C_k$ (это видно из (4)) и вспоминая, что $\xi_0(r) = 0$:

$$\xi(r, \varphi, t) = A\pi V_0 r_0 \sum_{k=1}^{k=\infty} C_k J_k\left(r_0 \frac{\omega k}{c}\right) \operatorname{Im}\left(H_k^{(1)}\left(r \frac{\omega k}{c}\right) e^{ik(\varphi - \omega t)} \right). \quad (28)$$

Анализ решения

Обсудим полученный результат (28). Несомненно, что ряд (28) сходится, однако строгое доказательство его сходимости, определение скорости сходимости – весьма непростая математическая задача, выходящая за рамки настоящей работы. Отметим лишь наличие важного признака сходимости – общий член ряда (28) стремится к нулю при $k \rightarrow \infty$. Далее на качественном уровне обсудим физическую адекватность (28).

В первом приближении в соответствии с асимптотикой цилиндрических функций [8] при больших значениях r - удалении от вращающегося источника (при $r \frac{\omega k}{c} \gg k$) для (28) можно записать:

$$\xi(r, \varphi, t) \approx 2A\pi V_0 r_0 \sum_{k=1}^{k=\infty} C_k J_k\left(r_0 \frac{\omega k}{c}\right) \sqrt{\frac{2}{\pi\left(r \frac{\omega k}{c}\right)}} \sin\left(k(\varphi - \omega t) + r \frac{\omega k}{c} - \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right). \quad (29)$$

Из (29) видно, что при $r \rightarrow \infty$ получаем $\xi \rightarrow \infty$. Таким образом, граничное условие (2) выполняется.

Легко заметить, что линиями уровня (в фиксированный момент времени) для каждого из членов ряда (29) являются спирали вида $\frac{1}{\sqrt{r}} \sin(r + \varphi) = const$. Понятно, что волновая картина будет представлять собой довольно сложную интерференцию волн, описываемых каждым из

слагаемых ряда (28). Однако не стоит пытаться учесть вклад всех слагаемых. Рассмотрение конечных размеров источника волн, как и в [7; 10], приводит к выводу о том, что наибольший вклад в сумму ряда (28) будут приносить первые слагаемые. Действительно, при увеличении k множитель C_k будет достаточно быстро стремиться к нулю, уменьшая вклад соответствующих слагаемых ряда (28). Это создает удобство для проведения численного моделирования волновой картины на основе (28).

Численное моделирование волновой картины

На приведенных ниже рисунках представлены результаты численного моделирования волновой картины в компьютерной системе аналитических вычислений MAPLE. Результат, приведенный на рис. 2, получен на основе (28). Хорошо видна спиральная волна, растущая от вращающегося источника. Время счета составляло порядка десятка минут.

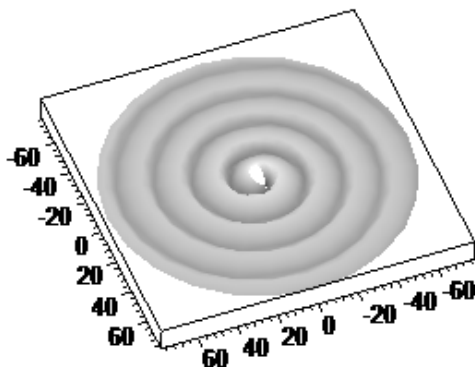
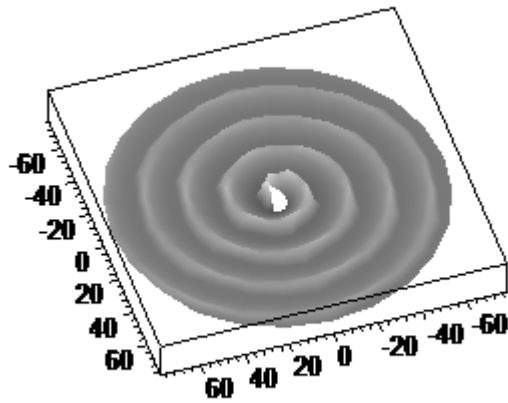


Рис. 2. Волновая картина при значениях параметров $r_0 = 1$, $\omega = 100$, $c = 0.5$, $\varphi_0 = \frac{\pi}{3}$.

Учитывалось $k = 500$ членов ряда.

Особый интерес представляет моделирование волновой картины, возникающей от вращения кольца с малым разрезом. Так, в [3] рассмотрен механизм раскрутки АВ с щелью в стенке, куда попадает встречный поток воздуха (или, например, тяжелые предметы, поднятые с поверхности земли). Пример численного моделирования таких волн приведен на рис 3.



**Рис. 3. Волновая картина при значениях параметров $r_0 = 1$, $\omega = 100$, $c = 0.5$, $\varphi_0 = 355^\circ$.
Учитывалось $k = 500$ членов ряда.**

Заключение

В работе построена и исследована модель динамики волновой картины на поверхности жидкости, возникающей при вращении дуги окружности. В случае приближения длинных волн получено аналитическое выражение для возвышения свободной поверхности жидкости в виде бесконечного ряда. Обсуждена его сходимости, показана асимптотика решения при большом удалении от источника, указан вид линий уровня волновой картины. На основе полученных аналитических выражений проведено численное моделирование волновой картины с использованием компьютерной системы аналитических вычислений MAPLE. Перспективами развития и возможным практическим применением построенной математической модели является создание эффективных методик прогнозирования возникновения и оценки развития волновой картины, создаваемой атмосферными вихрями, а следовательно – создание более адекватных моделей прогнозов погоды.

Список литературы

1. Алексеев В.В., Мелешко А.Н., Сугрей В.Н. Лабораторное моделирование системы главных волн, создаваемых тропическим циклоном // Доклады академии наук. – 1983. – Т. 273. – № 6. – С. 1343-1350.
2. Белов А.Н., Масюков В.В. Волновая картина при сложном движении барического образования // Ученые записки Тверского государственного университета. – Тверь, 2000. – С. 119-123.
3. Белов А.Н., Масюков В.В. Математическая модель атмосферных вихрей как часть комплексной модели взаимодействия «атмосфера – океан» // Мат. VII Междунар. семинара «Физико-математическое моделирование систем». – Воронеж, 2011. – Ч. 2. – С. 122-136.

4. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике (для научных работников и инженеров). – СПб. : Лань, 2003. – 832 с.
5. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. – М. : Наука, 1965. – 716 с.
6. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика : учеб. пособ. : в 10 т. – М. : Физматлит, 2001. – Т. VI. Гидродинамика. – 736 с.
7. Масюков В.В. Математическое моделирование волновой картины от тропического урагана // Моделирование сложных систем. – Тверь, 1999. – С. 171-176.
8. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М. : Наука, 1972. – 736 с.
9. Хайн А.П., Сутырин Г.Г. Тропические циклоны и их взаимодействие с океаном. – Л. : Гидрометеоздат, 1983. – 625 с.
10. Masjukov V.V. A mathematical and computer model of the main tropical hurricane wave system // Computer physics communications. – 2000. – № 126. – P. 121-125.

Рецензенты:

Калабин А.Л., д.ф.-м.н., профессор, зав. кафедрой «Программное обеспечение вычислительной техники», ФГБОУ ВПО «Тверской государственный технический университет», г. Тверь.

Богданов Ю.В., д.т.н., профессор, ГБОУ ВПО «Тверская ГМА Минздравсоцразвития», г. Тверь.