УДК 62.50

# МЕТОД МНОГОСЛОЙНОГО СЕТЕВОГО ОПЕРАТОРА ДЛЯ СИНТЕЗА СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ЛЕТАТЕЛЬНЫМ АППАРАТОМ

**Софронова Е. А.[2], Дивеев А. И.[1]**

[1]*Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Вычислительный центр им. А. А. Дородницына Российской академии наук, Москва, Россия (119333, Москва, ул. Вавилова, 40), e-mail: aidiveev@mail.ru*

[2] *Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования Российский университет дружбы народов, Москва, Россия (117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6), e-mail: sofronova_ea@mail.ru*

**Рассматривается задача синтеза системы управления, в которой управление ищется как функция координат пространства состояний. Задача заключается в том, чтобы обеспечить движение летательного аппарата в окрестности пространственной траектории, заданной в виде множества точек. Для решения задачи используется метод многослойного сетевого оператора, который отличается от простого сетевого оператора тем, что одно математическое выражение описывается с помощью нескольких целочисленных матриц меньшей размерности, чем матрица исходного сетевого оператора. Применение многослойного сетевого оператора увеличивает эффективность алгоритма решения задачи синтеза. Представлена оценка наиболее эффективного разбиения сетевого оператора на слои. Поиск оптимального решения осуществляется многокритериальным генетическим алгоритмом. Приведен численный пример синтеза системы управления с помощью метода многослойного сетевого оператора.**

Ключевые слова: синтез системы управления, сетевой оператор, генетический алгоритм.

# SYNTHESIS OF CONTROL SYSTEM FOR AIRCRAFT MOTION BY METHOD OF MULTILAYERED NETWORK OPERATOR

**Sofronova E. A.[2], Diveev A. I.[1]**

[1] *Institution of Russian Academy of Sciences Dorodnicyn Computing Centre of RAS, Moscow, Russia (119333, Moscow, Vavilov str., 40), e-mail: aidiveev@mail.ru*

[2] *Peoples' Friendship University of Russia, Moscow, Russia (117198, Moscow, Miklukho-Maklaya str., 6), e-mail: sofronova_ea@mail.ru*

**A problem of synthesis of control systems is considered. The control is searched as a function of state coordinates and it should provide motion close to the trajectory given as a set of points. To solve the problem a new computational method based on genetic programming and multilayered network operator is used. A multilayered network operator method presents mathematical equation as a number of integer matrices of smaller dimension that makes algorithm more effective. The effectiveness estimation of the network operator division into layers is presented. The optimal solution is searched by multiobjective genetic algorithm. An example of synthesis of control system by the multilayered network operator method is presented.**

Key words: synthesis of control systems, network operator, genetic algorithm.

## Введение

Задача синтеза оптимального управления состоит в том, чтобы найти управление, зависящее от координат пространства состояния объекта. Для синтеза системы управления разработан новый численный метод на основе сетевого оператора [1-6, 8-10].

Основная сложность построения численных алгоритмов синтеза оптимального управления заключается в том, что поиск решения задачи необходимо производить на пространстве формальных соотношений. Сетевой оператор позволяет представлять математические выражения в виде целочисленной матрицы. Поиск возможного решения осуществляется с помощью генетического алгоритма.

При большой размерности матрицы такое представление не всегда эффективно, т.к. она содержит большое количество нулевых элементов. В настоящей работе применяется многослойный сетевой оператор, который представляет собой совокупность связанных ориентированных графов, каждый из которых описывается с помощью целочисленной матрицы меньшей размерности, чем весь сетевой оператор.

**1. Постановка задачи**

Рассмотрим задачу синтеза системы управления маневром беспилотного летательного аппарата. Математическая модель объекта управления имеет следующий вид

$$\dot{V} = g(u_1 - \sin\theta), \tag{1}$$

$$\dot{\theta} = \frac{g}{V}(u_2 - \sin\theta), \tag{2}$$

$$\dot{\Psi} = \frac{-g u_3}{V\cos\theta}, \tag{3}$$

$$\dot{x}_c = V\cos\theta\cos\Psi, \tag{4}$$

$$\dot{H} = V\sin\theta, \tag{5}$$

$$\dot{z}_c = -V\cos\theta\sin\Psi, \tag{6}$$

где $V$ – воздушная скорость самолета, $\theta$ – угол наклона траектории, $\Psi$ – угол пути, $x_c$ – продольная дальность полета, $H$ – высота полета, $z_c$ – боковая дальность полета.

Заданы начальные значения

$$\mathbf{x}(0) = [V_0\ \theta_0\ \Psi_0\ x_{c0}\ H_0\ z_{c0}]^T. \tag{7}$$

Задана траектория движения в трехмерном пространстве в виде упорядоченного множества N точек

$$P = ((t_1, \tilde{x}_1, \tilde{y}_1, \tilde{z}_1), (t_2, \tilde{x}_2, \tilde{y}_2, \tilde{z}_2), \ldots, (t_N, \tilde{x}_N, \tilde{y}_N, \tilde{z}_N)). \tag{8}$$

Заданы функционалы качества

$$J_1 = \max_k \min_{t_k \le t \le t_{k+1}} \sqrt{(x_c(t) - \tilde{x}_k)^2 + (H(t) - \tilde{y}_k)^2 + (z_c(t) - \tilde{z}_k)^2} \to \min, \tag{9}$$

$$J_2 = \max_k \min_{t_k \le t \le t_{k+1}} |x_c(t) - \tilde{x}_k| + |H(t) - \tilde{y}_k| + |z_c(t) - \tilde{z}_k| \to \min. \tag{10}$$

Значения компонент вектора управления ограничены

$$u_i^- \le u_i \le u_i^+,\ i = 1, 2, 3. \tag{11}$$

Необходимо найти управление в виде

$$\mathbf{u} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{q}), \tag{12}$$

где $\mathbf{g}(\mathbf{x},\mathbf{q})$ – искомая нелинейная вектор-функция, аргументами которой являются вектор пространства состояний $\mathbf{x} = [V\ \theta\ \Psi\ x_c\ H\ z_c]^T$ и вектор постоянных параметров $\mathbf{q} = [q_1\ \ldots\ q_r]^T$, который находится в процессе синтеза.

Управление должно удовлетворять ограничениям (11) и минимизировать функционалы (9), (10). Функционалы описывают нормы отклонений положений центра масс летательного аппарата от заданной программной траектории (8).

При управлении летательным аппаратом задается текущая точка программной траектории $(t_k, \tilde{x}_k, \tilde{y}_k, \tilde{z}_k) \in P$, $t \le t_k$. Синтезированная система управления должна обеспечить приближение летательного аппарата к точке программной траектории. При достижении окрестности текущей точки $\sqrt{(x_c(t) - \tilde{x}_k)^2 + (H(t) - \tilde{y}_k)^2 + (z_c(t) - \tilde{z}_k)^2} \le \varepsilon$ осуществляется переключение на следующую точку программной траектории $(t_{k+1}, \tilde{x}_{k+1}, \tilde{y}_{k+1}, \tilde{z}_{k+1}) \in P$. Если за время $t \le t_k$ окрестность заданной точки не была достигнута, то переключение на новую точку осуществляется по времени $t > t_k$. Управление должно зависеть от координат состояния объекта и программной траектории. Переключение точек во времени осуществляется только в случае большого отклонения от программной траектории. Для решения задачи используем метод сетевого оператора.

### 2. Метод сетевого оператора

Сетевой оператор представляет собой структуру данных, которая предназначена для эффективного описания математических выражений. Для формального построения сетевого оператора вводим четыре конечных упорядоченных множества [8], из элементов которых состоит математическое выражение: множество переменных $\boldsymbol{V} = (x_1, \ldots, x_n)$, множество параметров $\boldsymbol{Q} = (q_1, \ldots, q_l)$, множество унарных операций $\boldsymbol{O}_1 = (\rho_1(z), \rho_2(z), \ldots, \rho_W(z))$, множество бинарных операций $\boldsymbol{O}_2 = (\chi_0(z', z''), \chi_1(z', z''), \ldots, \chi_{V-1}(z', z''))$. Все бинарные операции отвечают свойствам коммутативности, ассоциативности и должны иметь единичный элемент. Множество бинарных операций должно быть непустым $\boldsymbol{O}_2 \ne \varnothing$.

В памяти ЭВМ сетевой оператор представляется в виде матрицы сетевого оператора $\boldsymbol{\Psi} = [\psi_{ij}]$, $i, j = \overline{1, L}$. В качестве примера рассмотрим матрицу сетевого оператора для математического выражения $y = e^{-q_1 x_1} \sin(q_3 + q_2 x_2)$. Зададим конструктивные множества $\boldsymbol{V} = (x_1, x_2)$, $\boldsymbol{Q} = (a, b, c)$, $\boldsymbol{O}_1 = (\rho_1(z) = z, \rho_3(z) = -z, \rho_6(z) = e^z, \rho_{12}(z) = \sin(z))$, $\boldsymbol{O}_2 = (\chi_0(z', z'') = z' + z'', \chi_1(z', z'') = z' z'')$. Матрица сетевого оператора имеет вид

$$\mathbf{\Psi}=\begin{bmatrix} x_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q_2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & q_3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Для вычисления математического выражения по матрице сетевого оператора вводим вектор узлов $z=[z_1 \dots z_L]^T$. Для вычисления используем соотношение

$$z_j^{(i)}=\begin{cases}\chi_{\psi_{jj}}\left(z_j^{(i-1)},\rho_{\psi_{jj}}\left(z_j^{(i-1)}\right)\right),\text{если } \psi_{jj}\neq 0,\\ z_j^{(i-1)},\text{иначе}\end{cases} \qquad (13)$$

где $i=\overline{1,L-1}$, $j=\overline{1,L-1}$.

Для данного примера вектор узлов имеет следующие начальные значения $z^{(0)}=[x_1 \quad q_1 \ x_2 \ q_2 \ q_3 \ 1\,1\,0\,1]^T$. Методика вычислений по сетевому оператору подробно описана в работах [1-3, 8-10]. Полученное математическое выражение хранится в элементе $z_9^{(8)}$

$$z_9^{(8)}=\chi_1(\rho_{12}(z_8),z_9)=e^{-q_1x_1}\sin(q_3+q_2x_2).$$

Вычисление по сетевому оператору не требует анализа символов строк и выполняется достаточно быстро. Использование сетевого оператора позволило применить генетический алгоритм для поиска оптимального математического выражения при решении задач синтеза систем управления, идентификации, аппроксимации и др.

Сложность математических выражений определяет размерность матрицы сетевого оператора. Для больших матриц при вычислениях с помощью соотношения (13) приходится просматривать большое количество нулевых элементов, $\psi_{ij}=0$. Чтобы сократить число нулевых элементов в матрице сетевого оператора, используем вместо одного сетевого оператора с большим количеством узлов многослойный сетевой оператор, который состоит из нескольких сетевых операторов, соединенных друг с другом.

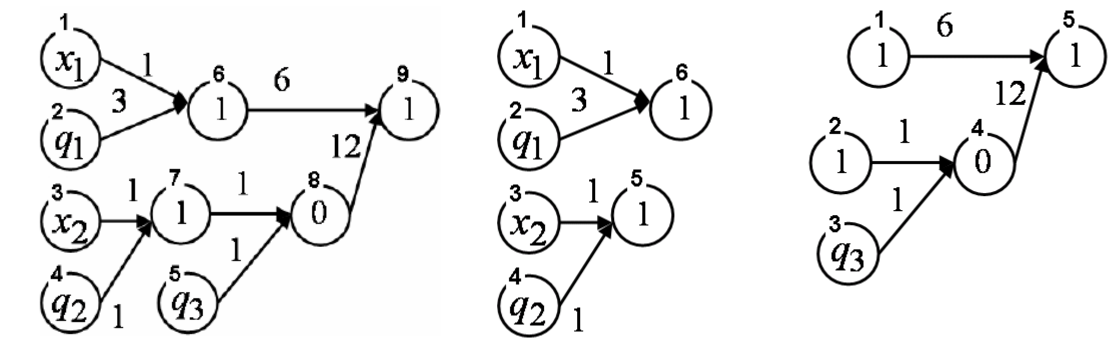
**3. Многослойный сетевой оператор**

Многослойный сетевой оператор [8] описывается несколькими матрицами сетевых операторов меньшей размерности, чем матрица исходного сетевого оператора.

При построении многослойного сетевого оператора необходимо в каждый слой добавлять узлы-источники, которые содержат значения переменных, определяющих результаты вычислений сетевого оператора предыдущего слоя. Для разбиения сетевого оператора на два слоя необходимо найти определенное подмножество узлов, которые после разбиения стали бы узлами-стоками для одного слоя и узлами-источниками для другого.

Множество разбиения сетевого оператора – это подмножество узлов, которые отвечают следующим свойствам: а) любой путь от узла-источника до узла-стока должен проходить через узел множества разбиения; б) между любой парой узлов множества разбиения не должно быть пути; в) если к узлу, не принадлежащему множеству разбиения, ведет путь через узел, принадлежащий множеству разбиения, то все остальные пути к этому узлу должны также идти через узлы, принадлежащие множеству разбиения.

Для сетевого оператора математического выражения $y = e^{-q_1 x_1} \sin(q_3 + q_2 x_2)$ (рис. 1 а) в качестве множества разбиения используем узлы 6 и 7. В результате получаем два слоя сетевого оператора, которые изображены на рис. 1 б, в.



а) Исходный сетевой оператор б) Слой 1 в) Слой 2

Рис. 1. Пример разделения сетевого оператора на два слоя

Слой 1 сетевого оператора описывает два математических выражения $y_1 = -x_1 q_1$ и $y_2 = x_2 q_2$. Слой 2 соответствует математическому выражению $y = e^{y_1} \sin(y_2 + q_3)$.

Матрицы слоев сетевого оператора имеют следующий вид:

$$\mathbf{\Psi}_1 = \begin{bmatrix} 0&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&3&0 \\ 0&0&0&0&0&1 \\ 0&0&0&0&0&1 \\ 0&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&0&1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{\Psi}_2 = \begin{bmatrix} 0&0&0&0&6 \\ 0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&12 \\ 0&0&0&0&1 \end{bmatrix}.$$

В результате вместо одного операторного уравнения

$$y = \mathbf{\Psi} \circ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}$$

имеем два операторных уравнения с матрицами сетевых операторов меньшего размера

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \mathbf{\Psi}_1 \circ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ q_1 \\ q_2 \end{bmatrix},\ y = \mathbf{\Psi}_2 \circ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ q_3 \end{bmatrix}.$$

При разбиении матрицы сетевого оператора необходимо учитывать рабочее пространство матрицы для описания математических выражений [8]. Чем меньше величина рабочего пространства, тем эффективнее используется каждый элемент матрицы сетевого оператора для описания математического выражения. Величину рабочего пространства вычисляем по формуле

$$W = \frac{(L-m)(L-m-1)}{2} + L - m + (L-m)m = \frac{(L-m)(L+m+1)}{2}, \tag{14}$$

где $L$ – размерность матрицы сетевого оператора, $m$ – количество узлов-источников.

**4. Синтез системы управления**

Для решения задачи (1)-(12) использован специальный комплекс программ [10].

Матрица сетевого оператора состояла из двух слоев $\mathbf{\Psi}_1$ и $\mathbf{\Psi}_2$. Первый слой имел размерность 18x18 и 12 узлов-источников, второй слой имел размерность 30x30 и 16 узлов-источников. Рабочие пространства матриц слоев сетевого оператора имели следующие значения: $W_1 = 93$, $W_2 = 329$. Всего $W_1 + W_2 = 422$ элемента. В качестве альтернативы рассматривался один сетевой оператор размерностью 32x32 и 12 узлов-источников. Его рабочее пространство составляло $W = 450$ элементов.

В результате было получено следующее управление

$$u_1 = \tilde{z}_1,\ u_2 = \sqrt{\tilde{z}_2^2 + \tilde{z}_3^2}\cos\left(\operatorname{arctg}\frac{\tilde{z}_3}{\tilde{z}_2}\right),\ u_3 = \sqrt{\tilde{z}_2^2 + \tilde{z}_3^2}\sin\left(\operatorname{arctg}\frac{\tilde{z}_3}{\tilde{z}_2}\right),$$

где

$$\tilde{z}_i = \begin{cases} z_i^+,\ \text{если}\ z_i > z_i^+, \\ z_i^-,\ \text{если}\ z_i < z_i^-,\ i = 1,2,3, \\ z_i\ \text{- иначе,} \end{cases}$$

$$[z_1\ z_2\ z_3]^T = \mathbf{\Psi}_2 \circ [\Delta H\ q_2\ \Delta z_c\ q_3\ \Delta\dot{x}_c\ q_4\ \Delta\dot{H}\ q_5\ \Delta\dot{z}_c\ q_6\ y_1 \ldots y_6]^T,$$

$$[y_1 \ldots y_6]^T = \mathbf{\Psi}_1 \circ [\Delta x_c\ q_1\ \Delta H\ q_2\ \Delta z_c\ q_3\ \Delta\dot{x}_c\ q_4\ \Delta\dot{H}\ q_5\ \Delta\dot{z}_c\ q_6]^T,$$

$$\Delta x_c = \tilde{x}_k - x_c(t),\ \Delta H = \tilde{y}_k - H(t),\ \Delta z_c = \tilde{z}_k - z_c(t),\ \Delta \dot{x}_c = \frac{\tilde{x}_{k+1} - \tilde{x}_{k-1}}{t_{k+1} - t_{k-1}} - \dot{x}_c(t),$$

$$\Delta \dot{H} = \frac{\tilde{y}_{k+1} - \tilde{y}_{k-1}}{t_{k+1} - t_{k-1}} - \dot{H}(t),\ \Delta \dot{z}_c = \frac{\tilde{z}_{k+1} - \tilde{z}_{k-1}}{t_{k+1} - t_{k-1}} - \dot{z}_c(t),\ q_1 = 1{,}28906,\ q_2 = 1{,}55469,\ q_3 = 1{,}17188,$$

$$q_4 = 1{,}71875,\ q_5 = 0{,}25781,\ q_6 = 0{,}65625.$$

На рис. 2 приведены результаты моделирования синтезированной системы управления. На графиках точками указана программная пространственная траектория.

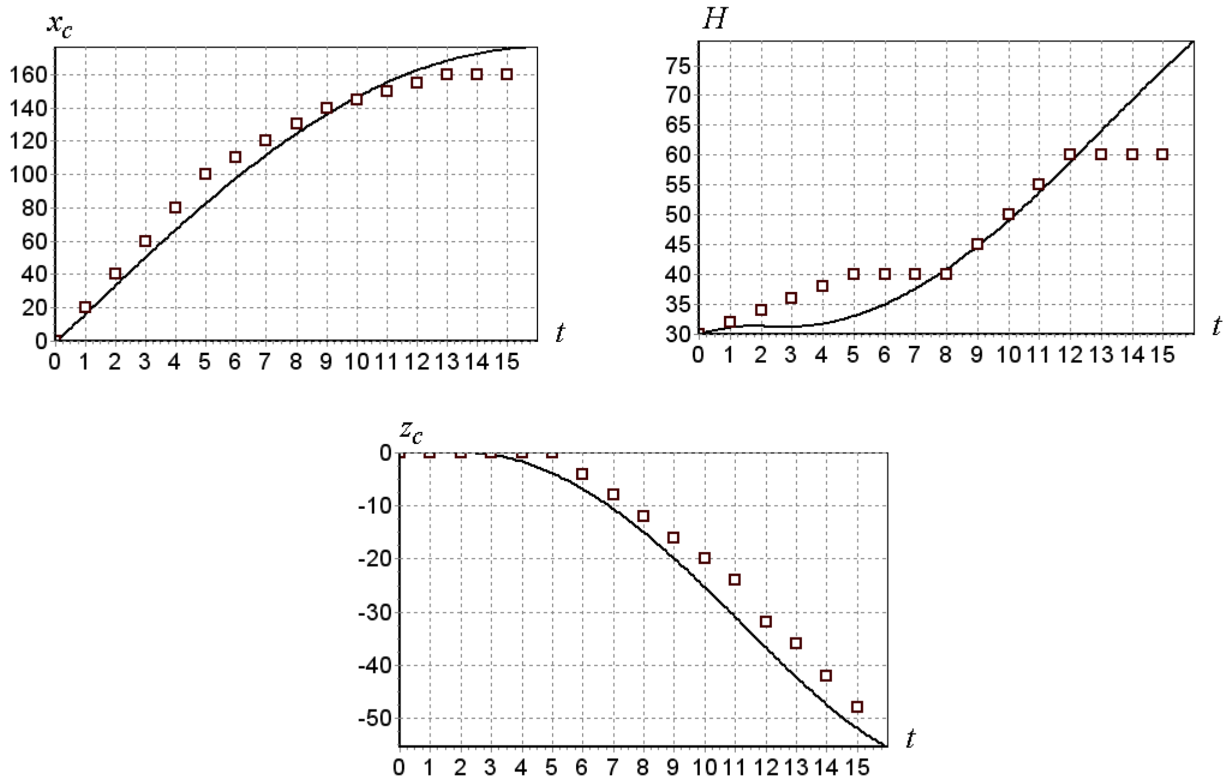



Рис. 2. Результаты моделирования

Вычислительный эксперимент проведен в среде Borland Developer Studio 2006.

Работа выполнена по темам грантов РФФИ №10-08-00618-а «Исследование и разработка численных методов идентификации нелинейных систем управления» и № 11-08-00532-а «Исследование методов синтеза интеллектуальных систем управления».

**5. Заключение**

Метод сетевого оператора позволяет синтезировать систему управления пространственным движением летательного аппарата. В результате использования многослойного сетевого оператора удается сократить количество просматриваемых в результате вычислений элементов.

## Список литературы

1. Дивеев А. И., Софронова Е. А. Метод генетического программирования для автоматического подбора формул в задаче структурного синтеза системы управления // Труды института Системного анализа РАН. Динамика неоднородных систем / Под редакцией члена-корр. РАН Ю. С. Попкова. М.: ИСА РАН, КомКнига, 2006. Вып. 10 (1). С. 14-26.
2. Дивеев А. И., Софронова Е. А. Метод построения функциональных зависимостей для решения задачи синтеза оптимального управления // Труды института Системного анализа РАН. Динамика неоднородных систем / Под ред. члена-корр. РАН Ю. С. Попкова. М.: ИСА РАН, КомКнига, 2007. Вып. 31(2). С. 14-27.
3. Дивеев А. И., Северцев Н. А., Софронова Е. А. Синтез системы управления метеорологической ракетой методом генетического программирования // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2008. № 5. С. 104-108.
4. Дивеев А. И., Пупков К. А., Софронова Е. А. Повышение качества систем управления на основе многокритериального синтеза методом сетевого оператора // Вестник РУДН. Серия Инженерные исследования. 2009. № 4. С. 5-12.
5. Дивеев А. И., Софронова Е. А. Синтез системы управления беспилотным вертолетом на основе метода сетевого оператора с учетом фазовых ограничений// Вестник Российского Университета Дружбы Народов. Серия Инженерные исследования. 2009. № 4. С. 9-14.
6. Дивеев А. И., Софронова Е. А. Метод сетевого оператора для идентификации систем управления// Вестник Российского университета дружбы народов. Серия инженерные исследования (информационные технологии и управление). 2008. № 4. С. 78-85.
7. Дивеев А. И., Софронова Е. А. Многокритериальный структурно-параметрический синтез системы управления методом сетевого оператора. Программа для ЭВМ. № 2009613966 // Официальный бюллетень Федеральной службы по интеллектуальной собственности, патентам и товарным знакам. Программы для ЭВМ, базы данных, топологии интегральных микросхем. М.: ФГУ ФИПС. 2009. № 4 (69), (I ч.). С. 104.
8. Дивеев А. И. Метод сетевого оператора. М.: ВЦ РАН, 2010. 178 с.
9. Diveyev A. I., Sofronova E. A. Application of network operator method for synthesis of optimal structure and parameters of automatic control system // Proceedings of 17-th IFAC World Congress, Seoul, 05.07.2008 – 12.07.2008. P. 6106-6113.
10. Diveyev A. I., Sofronova E. A. The Network Operator Method for Search of the Most Suitable Mathematical Equation // Bio-Inspired Computational Algorithms and Their Applications – InTech, 2012 – Ch.2. – PP.17-42. ISBN 978-953-51-0214.

**Рецензенты:**

Никульчев Е. В., д.т.н., профессор, проректор по информатизации, зав. кафедрой прикладной математики и моделирования систем Всероссийской государственной налоговой академии Министерства финансов РФ, г. Москва.

Юрков Н. К., д.т.н., профессор, зав. кафедрой конструирования и производства радиоаппаратуры Пензенского государственного университета, г. Пенза.