

УДК 539.3

## ВЛИЯНИЕ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ НА РАСПРОСТРАНЕНИЕ ДВУМЕРНЫХ ВОЛН В ПРЯМОУГОЛЬНИКЕ

Аширбаев Н. К., Аширбаева Ж. Н.

*Южно-Казахстанский государственный университет имени М. Ауезова (160012, г. Шымкент, пр. Тауке-хана 5), e-mail: [ank\\_56@mail.ru](mailto:ank_56@mail.ru)*

В данной работе рассмотрена плоская упругая изотропная среда с прямоугольным поперечным сечением конечных размеров. В начальный момент времени на некоторой части лицевой границы прямоугольной области прикладывается внешняя динамическая  $P$  – образная нагрузка, а остальная часть этой границы свободна от напряжений. На остальных границах прямоугольной области заданы граничные условия. В условиях плоской деформации задача решена численно с помощью метода пространственных характеристик. Особенностью рассмотренного тела является то, что в особых точках лицевой границы прямоугольной области граничные условия терпят разрыв первого рода. Именно в этих особых точках получены разрешающие системы уравнений для нахождения искомых функций. Путем численной реализации установлена устойчивость расчетных алгоритмов для достаточно большого времени. Результаты исследования в окончательном виде доведены до численного решения. Несомненный интерес представляют задачи с разрывами в граничных условиях, так как информация о динамической напряженности в окрестности разрыва необходима для практических целей, например, проектирования строительных объектов.

Ключевые слова: изотропная среда, динамическая нагрузка, плоская деформация, особая точка, упругое, напряжение, скорость, волновой процесс, численное решение, алгоритм.

## THE INFLUENCE OF BORDER CONDITIONS ON DISTRIBUTION OF TWO-MEASURED WAVES IN RECTANGLE

Ashyrbaev N. K., Ashyrbaeva Zh. N.

*M. Auezov South Kazakhstan State University (160012, Shymkent c., Tauke-Khan avenue 5)  
e-mail: [ank\\_56@mail.ru](mailto:ank_56@mail.ru)*

In the given work was considered the plane, elastic and isotropic environment with rectangular cross section of ultimate sizes. At the first time on some part of an exterior border of rectangular part puts the exterior dynamic  $P$  – figurative load, but the rest parts of this border are free from tension. On the rest borders of rectangular oblast are set border conditions. In conditions of plane deformation the task is solved by numerical method, also by method of spatial descriptions. The peculiarity of considered body is that in special points of exterior border of rectangular oblast, border conditions tolerate break of the first type. Exactly, in these special points were accepted the allowing systems of equations for finding of unknown quantity functions. By numerical realization was set up the steadiness of settlement algorithm for enough time. The results of the research in definitive type were related to numerical decision. Undoubted interest represent tasks with breaks in border conditions, as information about dynamic tension at break is necessary for practical goals, for instance, design of building objects.

Key words: isotropic environment, dynamic load, plane deformation, special point, tension, speed, wave progress, numerical solution, algorithm.

### Введение

Задача определения нестационарных волновых полей относится к числу весьма сложных. Отличительной чертой многих практически важных динамических задач механики деформируемого твердого тела является разрывной характер их решений. Таковы случаи, когда рассматриваемые упругие области конечных размеров содержат разрывы в граничных условиях, отверстия с ломаным контуром, вырезы и инородные включения, являющиеся источниками высокой концентрации напряжений. Решение краевых задач для таких областей

невозможно без разработки эффективных численных методов. Поэтому центр тяжести проблемы исследования нестационарных волновых движений в сплошных средах все более смещается в сторону разработки и совершенствования разностных схем, позволяющих улучшать результаты расчетов. Продолжают интенсивно разрабатываться приближенные методы в различных модификациях, используемых для численного решения динамических задач однородных и структурно-неоднородных сред, как-то: методы конечных разностей, дробных шагов, пространственных характеристик, конечных элементов, сеточно-характеристический метод Годунова, граничных интегральных уравнений, метод источников и др.

Известными преимуществами обладают конечно-разностные методы, основанные на использовании характеристических поверхностей и соотношений совместности на них. Они максимально приближают область зависимости разностных и исходных дифференциальных уравнений, обеспечивая высокую точность результата как в случае гладких, так и разрывных решений, позволяют корректно рассчитывать границы тела и контактные поверхности. В 1960 г. была предложена явная разностная схема второго порядка точности для гиперболической системы дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка относительно трех переменных [6]. Эта схема, основанная на характеристическом подходе, реализована для исследования плоских упругих волн [7]. В последующем метод пространственных характеристик развит для решения конкретных задач динамики сплошных сред [1-5].

**Постановка задачи.** Исследуется плоская деформация упругого тела с прямоугольным поперечным сечением. Сечение имеет размеры  $0 \leq x_1 \leq \ell$ ,  $-L \leq x_2 \leq L$  (рисунок 1). Стороны прямоугольника разбиты соответственно на  $n_1$  и  $n_2$  частей. При этом шаги разбиения по координатам определены равенствами  $h_1 = \ell / n_1$  и  $h_2 = L / n_2$ . Таким образом, произвольная узловая точка  $O_{ij}$  будет иметь координаты  $(x_1^i, x_2^j)$ . При этом  $x_1^i = i h_1$  ( $i = 0, 1, 2, \dots, n_1$ ) и  $x_2^j = j h_2$  ( $j = -n_2, -n_2+1, -n_2+2, \dots, -1, 0, 1, 2, \dots, n_2-1, n_2$ ).

На части  $L^* \leq x_2 \leq L^{**}$  границы  $x_1 = 0$  прямоугольника прикладывается внешняя нормальная нагрузка, распределенная по границе по П-образной форме,

$$p + q = f(x_2, t) = A \sin(\omega t), \quad 0 \leq t \leq t^* \quad (1)$$

$$\tau = 0$$

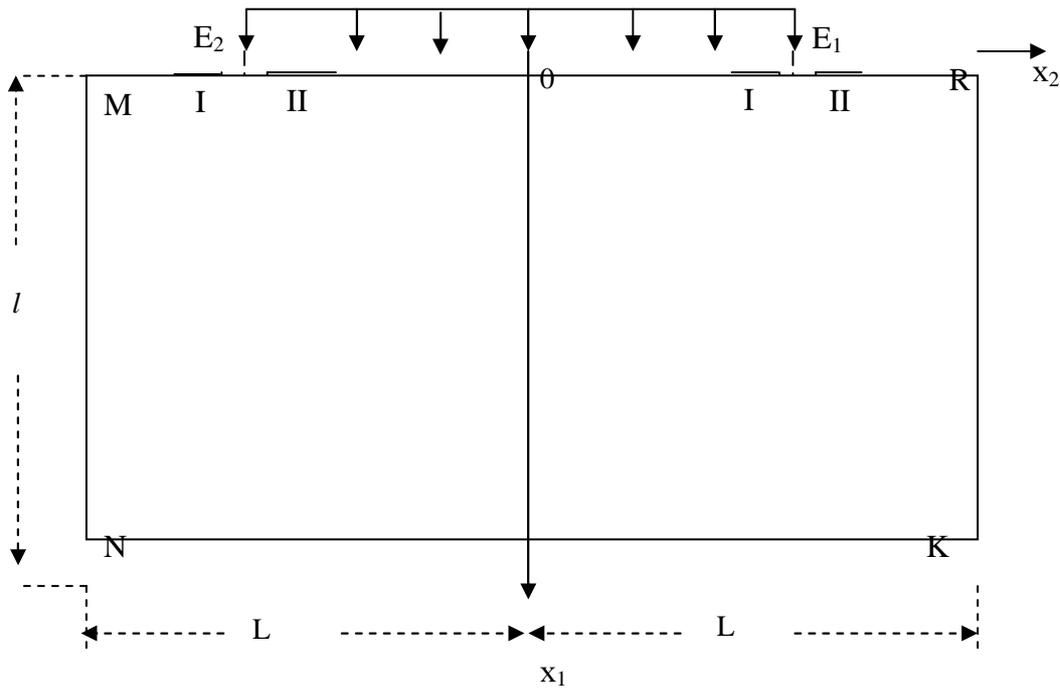


Рисунок 1. Исследуемая область

изменяющаяся во времени  $t$  и постоянная по поперечной координате  $x_2$ . Остальная часть границы  $x_1 = 0$  прямоугольника считается свободной от воздействия внешних напряжений. В (1) принято, что  $A$  – амплитуда внешней нагрузки, а  $\Omega$  её частота. Нагрузка действует на ограниченном участке времени  $t^*$ , определяя период его воздействия и соответствующую длину волны силы возбуждения. В моменты времени, превышающие  $t^*$ , нагрузка на этом участке границы полностью снимается, т.е. считается

$$p + q = 0, \quad \tau = 0 \quad \text{при } t \geq t^*. \quad (2)$$

Граница  $x_1 = \ell$  прямоугольника не нагружена и поэтому считается свободной от каких-либо воздействий, т.е.

$$p + q = 0, \quad \tau = 0 \quad \text{при } t \geq 0. \quad (3)$$

Наконец, границы  $x_2 = \pm L$  прямоугольника предполагаются закрепленными и на них скорости перемещений равны нулю в любой момент времени, т.е.

$$v_1(x_1; t) = v_2(x_1; t) = 0 \quad \text{при } t \geq 0. \quad (4)$$

Перечисленные граничные условия (1) – (4) должны быть дополнены начальными условиями. Предполагается, что в начальный момент времени ( $t = 0$ ) тело не нагружено и находится в состоянии покоя, т.е.

$$v_1(x_1; x_2; 0) = v_2(x_1; x_2; 0) = p(x_1; x_2; 0) = q(x_1; x_2; 0) =$$

$$= \tau(x_1; x_2; 0) = 0. \quad (5)$$

Задача заключается в определении внутри прямоугольника полей напряжений и скоростей, вызванных фронтами падающих и многократно дифрагированных упругих волн в момент времени  $t > 0$ .

В условиях плоской деформации волновой процесс во внутренних точках прямоугольника описывается системой динамических уравнений гиперболического типа, содержащей в качестве неизвестных безразмерные напряжения  $p$ ,  $q$ ,  $\tau$  скорости перемещений  $v_1$ ,  $v_2$

$$v_{1,t} - p_{,1} - q_{,1} - \tau_{,2} = 0; \quad v_{2,t} - p_{,2} + q_{,2} - \tau_{,1} = 0; \quad (6)$$

$$\gamma^2 (\gamma^2 - 1)^{-1} p_{,t} - v_{1,1} - v_{2,2} = 0; \quad \gamma^2 q_{,t} - v_{1,1} + v_{2,2} = 0;$$

$$\gamma^2 \tau_{,t} - v_{1,2} - v_{2,1} = 0.$$

Следуя работе [9], введены безразмерные независимые переменные и искомые величины:

$$\begin{aligned} \bar{t} &= \frac{tc_1}{b}; & \bar{x}_i &= \frac{x_i}{b}; & v_i &= \frac{1}{c_1} \frac{\partial u_i}{\partial t}, \quad (i=1,2) \\ p &= \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2\rho c_1^2}; & q &= \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2\rho c_1^2}; \\ \tau &= \frac{\sigma_{12}}{\rho c_1^2}; & \gamma &= \frac{c_1}{c_2}, \end{aligned} \quad (7)$$

где  $b$  – характерная длина. В дальнейшем черта над безразмерными параметрами опускается.

При построении численного решения предполагается, что граница прямоугольника совпадает с линией узлов квадратной сетки, которая покрывает исследуемую область.

Таким образом, необходимо найти решение уравнений (6) при сформулированных условиях (1) – (5). Поставленная задача решена методом пространственных характеристик, подробный алгоритм численной реализации которого изложен в [9]. Однако они могут быть использованы только в областях с непрерывным изменением всех входящих параметров. В связи с этим, ниже разработан и приведен алгоритм решения динамических задач в особых точках  $x_2 = L^*$  и  $x_2 = L^{**}$  границы  $x_1 = 0$ , в которых входящие параметры терпят разрыв первого рода.

Исследуемая область представлена на рисунке 1. Для определенности ниже рассматривается точка  $E_1(x_2 = L^{**})$  границы  $x_1 = 0$  прямоугольника. Окрестности точки  $E_1$  рассматриваются как две угловые точки I и II. Для углов I и II выписываются

соответствующие конечно-разностные соотношения, полученные в результате интегрирования по бихарактеристикам и по оси характеристических конусов. Нетрудно видеть, что соотношения для угла I подобны соотношениям правого верхнего угла R рассматриваемой области

$$\begin{aligned}\delta v_1^I - \delta v_2^I + \alpha_8 \delta p^I &= A_1, \\ \delta v_1^I + \delta v_2^I + \alpha_2 \delta q^I &= A_2\end{aligned}\quad (8a)$$

а для угла II – левого верхнего угла M

$$\begin{aligned}\delta v_1^{II} + \delta v_2^{II} + \alpha_8 \delta p^{II} &= A_3, \\ \delta v_1^{II} - \delta v_2^{II} + \alpha_2 \delta q^{II} &= A_4.\end{aligned}\quad (8b)$$

Здесь  $A_1, A_2, A_3, A_4$  известные на нижнем слое величины.

Слева от точки  $E_1$  всюду и в самой точке  $E_1$  в соответствии с (1) заданы нормальные напряжения. Их приращения в обозначениях (7) можно записать в виде

$$\delta p^I + \delta q^I = A [ \sin(\omega t) - \sin(\omega(t-k)) ]. \quad (9)$$

Кроме того, необходимо удовлетворить условиям непрерывности скоростей перемещений и нормальных и касательных напряжений при переходе от точек одного угла к сопряженным точкам другого. При этом

$$\begin{aligned}\delta v_1^I &= \delta v_1^{II}, \quad \delta v_2^I = \delta v_2^{II}, \\ \delta p^I - \delta q^I &= \delta p^{II} - \delta q^{II}, \quad \delta \tau^I = \delta \tau^{II}.\end{aligned}\quad (10)$$

Выписанная система уравнений (8), (9) и (10) позволяет единственным образом определить приращения скоростей перемещений  $\delta v_1^I, \delta v_1^{II}, \delta v_2^I, \delta v_2^{II}$  и приращения напряжений  $\delta p^I, \delta q^I, \delta \tau^I, \delta p^{II}, \delta q^{II}, \delta \tau^{II}$  в точке  $E_1$  разрыва граничных условий

$$\begin{aligned}\delta v_1 &= \Delta_1 / \Delta, \quad \delta v_2 = \Delta_2 / \Delta, \quad \delta p^I = \Delta_3 / \Delta, \quad \delta q^I = \Delta_4 / \Delta, \quad \delta \tau = 0, \\ \delta p^{II} &= \Delta_5 / \Delta, \quad \delta q^{II} = \Delta_6 / \Delta.\end{aligned}\quad (11)$$

Введенные здесь определители вычисляются на нижнем слое.

Расчетные формулы (11) используются при вычислениях искомых величин в особой точке  $E_1$ . В “левой” особой точке  $E_2$  ( $x_2 = L^*$ ) границы  $x_1 = 0$  прямоугольника точно также устанавливаются расчетные соотношения.

Настоящие расчеты проведены для прямоугольной области  $0 \leq x_1 \leq 100 h_1$  и  $|x_2| \leq 100 h_2$ . При этом  $h_1 = h_2 = h = 0.05$ . Шаг по времени  $k$  выбран в соответствии с необходимыми условиями устойчивости [9]

$$\left(\frac{k}{h}\right)^2 \leq \min \left\{ \frac{\gamma^2}{\gamma^2 + 1}, \frac{\gamma^2}{2(\gamma^2 - 1)} \right\} \quad (12)$$

используемой явной конечно-разностной расчетной схемы. В расчетах он считался равным  $k = 0.025$ . Коэффициент  $A$  в равенстве (1) принят равным единице, а период приложенной

импульсной нагрузки был выбран равным  $T = 100k$ . Таким образом, круговая частота динамической нагрузки  $\omega$  принята равной  $\omega = \pi / T = \pi / 100 k$ . Область приложения нагрузки принята следующая:  $x_1 = 0$ ,  $-97 h \leq x_2 \leq 97 h$ . Симметричность приложенной нагрузки и характер деформирования исследуемого тела позволяют ограничиться анализом динамических явлений в области только положительных значений переменной  $x_2 \geq 0$ .

На рис. 2 представлена осциллограмма продольной скорости  $v_1$  в пяти точках «наблюдения»  $x_2 = 0$  (точка наблюдения 1),  $x_2 = 20 h$  (2),  $x_2 = 40 h$  (3),  $x_2 = 60 h$  (4) и  $x_2 = 80 h$  (5), расположенных на лицевой границе  $x_1 = 0$  исследуемого тела. Во всех точках «наблюдения» на первых 100 шагах по времени вид осциллограммы определяется формой заданного на границе  $x_1 = 0$  синусоидального импульса (1). Первоначально появляется некоторое искажение в характере поведения параметра (это влияние дифрагированных из точки  $E_1(x_1 = 0, x_2 = 97h)$  возмущений, распространяющихся со скоростью  $c_1$  продольных волн). Это искажение первым наблюдается в точке  $x_2 = 80 h$ (5), которая является ближайшей к особой точке  $E_1$ . Через определенные моменты времени эффект особой граничной точки сказывается последовательно в точках «наблюдения» 4, 3, 2 и 1. Интенсивность влияния особой точки  $E_1$  мала. Более мощное возбуждение обусловлено приходом в точки «наблюдения» дифрагированной из угловой точки  $R(x_1 = 0, x_2 = 100 h)$  волны, распространяющейся со скоростью продольной волны  $c_1 = 1$ . Обсуждаемая волна также последовательно проходит через точки 5, 4, 3, 2 и 1. К моменту прихода в точку 1 дифрагированных из угловых точек  $M(x_1 = 0, x_2 = -100 h)$  и  $R(x_1 = 0, x_2 = 100 h)$  волн в неё приходит и отраженная от границы  $x_1 = 100 h$  прямоугольника волна. Поэтому на приведенной осциллограмме продольной  $v_1$  скорости перемещений в моменты времени, превышающие  $400k$ , можно видеть результат интерференции волн, являющийся наложением волн различного типа.

Таким образом получены расчетные конечно-разностные соотношения динамических задач в особых точках лицевой границы прямоугольника, в которых искомые параметры терпят разрыв первого рода. Путем численной реализации установлена устойчивость расчетных алгоритмов для достаточно большего времени. В результате проведенных исследований можно заключить, что разработанная методика расчета применительно к нестационарным динамическим задачам достаточно правильно передает основные закономерности и особенности протекающих волновых процессов и позволяет проводить исследование напряженно-деформированного состояния в однородных и слоисто-неоднородных средах.

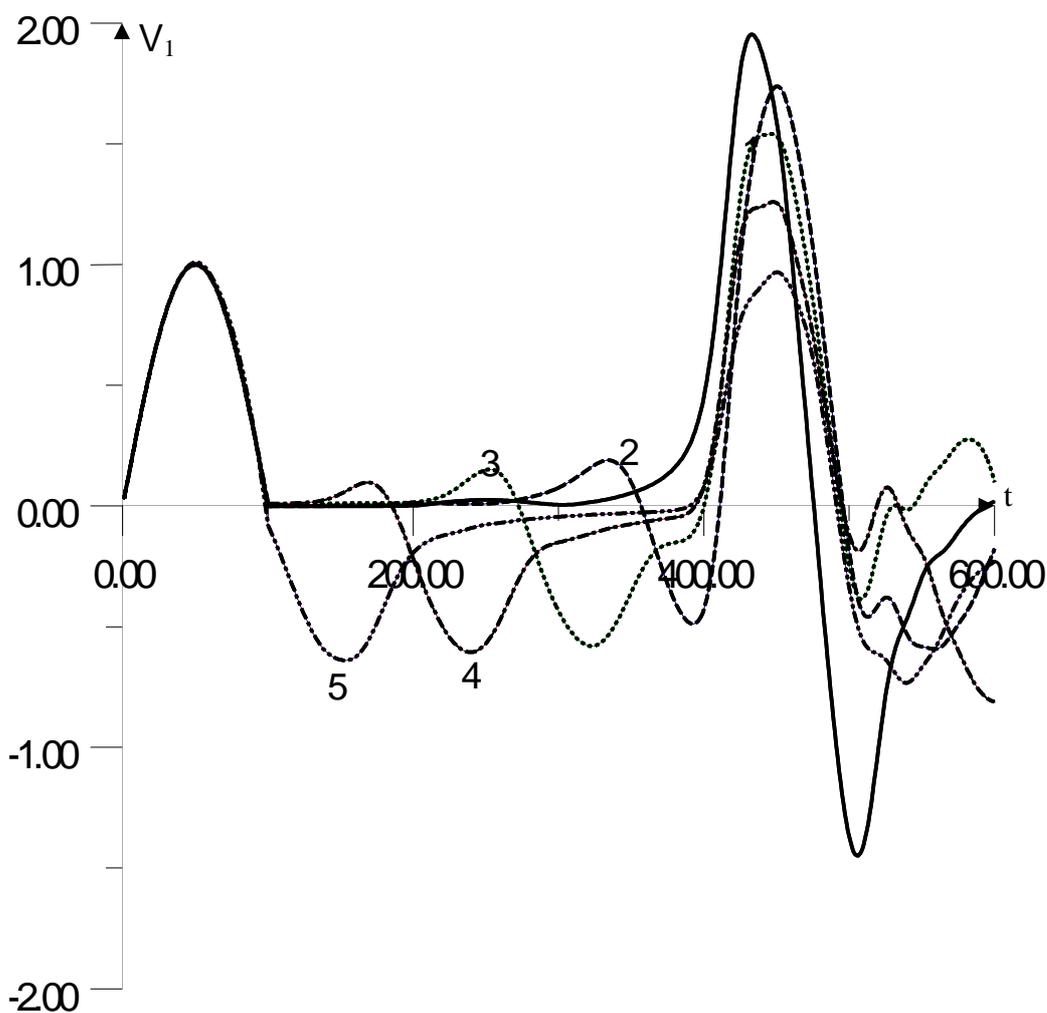


Рисунок 2. Осциллограмма продольной скорости перемещения  $v_1$  на лицевой стороне  $x_1 = 0$  прямоугольника в пяти точках «наблюдения» 1(0,0); 2(0,20h); 3(0,40h); 4(0,60h); 5(0,80h)

#### Список литературы

1. Аширбаев Н. К., Байтелиев Т. Б., Каримбаев Т. Д. Аналитическое исследование влияния инородных включений на параметры волнового движения в упругом прямоугольнике // Известия АН СССР. МТТ. – 1987. – №4. – С.126-133.
2. Ержанов Ж. С., Каримбаев Т. Д., Байтелиев Т. Б. Двумерные волны напряжений в однородных и структурно-неоднородных средах. – Алма-Ата: Наука, 1983. – 172 с.

3. Навал И. К., Сабодаш П. Ф. Численное решение задачи о распространении волн напряжений в сплошном цилиндре переменного радиуса // Известия АН МССР. Сер. физ.-техн. и мат. наук. – 1974. – №3. – С.27–35.
4. Римский В. К., Сабодаш П. Ф. Численное моделирование динамической контактной (смешанной) задачи для упругого слоя постоянной толщины // Известия АН СССР. МТТ. – 1979. – №5. – С.119–126.
5. Тарабрин Г. Т. Численное решение нестационарных задач динамики анизотропной упругой среды // Известия АН СССР. МТТ. – 1982. – №2. – С.83–95.
6. Butler D. S. The numerical solution of hyperbolic systems of partial differential equations in three independent variables // Proc. Roy. Soc., London, 1960, A 255. – P.232–252.
7. Clifton R. J. A difference method for plane problems in dynamic elasticity // Quart. Appl. Mathematicae. – 1967. V. 25, №1. – P. 97–116.

**Рецензенты:**

Дасибеков А., доктор технических наук, профессор кафедры прикладной механики Южно-Казахстанского государственного университета имени М. Ауезова, г. Шымкент.

Нысанов Е. А., доктор физико-математических наук, доцент кафедры «Теория и методика преподавания информатики» Южно-Казахстанского государственного университета имени М. Ауезова, г. Шымкент.

Антонов Александр Владимирович, д.т.н., профессор, декан факультета кибернетики, Обнинский институт атомной энергетики Национального исследовательского ядерного университета МИФИ Министерства образования и науки РФ, г. Обнинск.