

## МЕТОДИКА КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ КОЛЕБАНИЙ СИСТЕМ С ФРИКЦИОННЫМ ДЕМПФИРОВАНИЕМ

Нихамкин М.Ш., Воронов Л.В., Семенова И.В., Саженов Н.А., Балакирев А.А.

*Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, Россия (614000, г. Пермь, Комсомольский пр-т, 29), e-mail: kaf-ad@cpl.pstu.ac.ru*

Разработана методика моделирования колебаний в системах с демпферами сухого трения, основанная на применении метода конечных элементов в нестационарной трехмерной динамической постановке. Для моделирования контактного взаимодействия деталей использован алгоритм «пенальти». Трение в контакте описывается с помощью модели Кулона. Зависимость коэффициента трения от скорости взаимного перемещения контактирующих тел описывается экспоненциальным соотношением, включающим статическую и динамическую составляющие. На примере задачи о свободных затухающих колебаниях пружинного маятника, горизонтально скользящего с трением по плоскости, проведен сравнительный анализ эффективности двух методов конечно-элементного моделирования колебаний в демпферах сухого трения: с явной и неявной схемами интегрирования по времени. Проведено сравнение полученных в результате конечно-элементного моделирования кинематических и энергетических параметров системы с экспериментальными данными и результатами расчетов по модели с одной степенью свободы. Показаны преимущества явной схемы интегрирования при конечно-элементном моделировании колебаний систем с сухим трением.

Ключевые слова: колебания, фрикционное демпфирование, конечно-элементное моделирование.

## THE METHOD OF FINITE ELEMENT MODELING OF SYSTEMS VIBRATION WITH DFY FRICTION DAMPERS

Nikhamkin M.S., Voronov L.V., Semenova I.V., Sazhenkov N.A., Balakirev A.A.

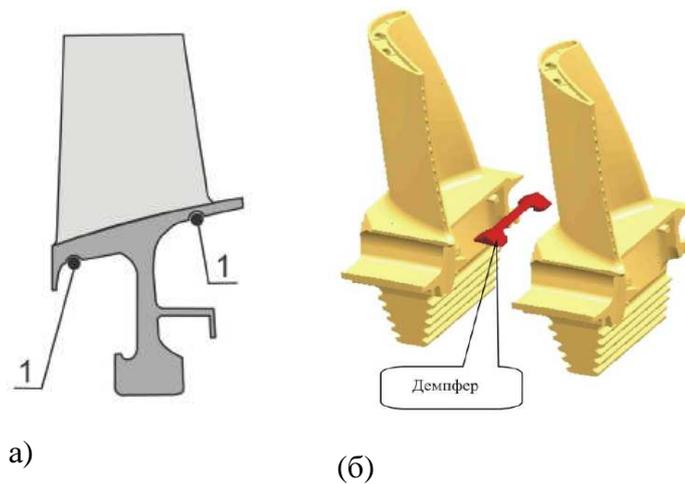
*Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russia (29, Komsomol ave., Perm, Russia 29614000), e-mail: kaf-ad@cpl.pstu.ac.ru*

The method of unsteady 3-D dynamical process finite element modeling is developed for vibrating systems with dry-friction dampers. The “penalty” algorithm is used for contact interaction of neighboring elements account. Friction sources are calculated according Coulomb model. The velocity dependence of coefficient of friction is calculated by exponential correlation in witch are static and dynamic components are included. The comparison study of two finite element analysis methods, based on implicit and explicit integration schemes, efficiency is made on the free damped oscillations of horizontal pendulum with dry friction problem. Kinematical and energetic parameters received during finite element analysis are compared with experimental data and analytical results for model with one degree of freedom. The explicit integration method advantages are shown for the dry friction oscillator swinging problem solving using finite element method.

Key words: oscillations, friction damping, finite element modeling.

### Введение

Значительной причиной отказов современных энергетических установок часто является повышенный уровень вибраций, приводящий к усталостным поломкам ответственных деталей. Снизить уровень вибраций деталей можно, увеличив демпфирование колебаний, в частности применив фрикционные демпферы. Их идея состоит в использовании для демпфирования колебаний пары сухого трения, в которой происходит преобразование механической энергии колебаний в тепло. На рис. 1 приведены примеры демпферов сухого трения в конструкциях рабочих колес газотурбинных двигателей [2; 7].



**Рис. 1. Демпферы сухого трения в рабочих колесах компрессора (а) и межлопаточные демпферы в рабочих колесах турбин (б).**

Проектирование демпферов сухого трения предполагает тщательный выбор геометрических и массовых параметров, обеспечивающих эффективное снижение вибраций. Решение этой задачи должно опираться на детальный анализ, сложность которого определяется нелинейностью процессов трения и контактного взаимодействия в парах сухого трения.

Колебания тел при наличии сухого трения описываются как в рамках механики твердого тела, так и с учетом деформирования контактирующих тел. Учет деформаций важен в связи с тем, что они определяют площадку контакта и действующие на ней усилия, которые обуславливают процессы трения. Решение практических задач проектирования демпферов сухого трения предполагает численное моделирование колебаний контактирующих тел именно в рамках механики деформируемого тела, в частности с применением метода конечных элементов (МКЭ). Несмотря на многообразие подходов к применению МКЭ для решения таких задач (см., например [6; 10]), единых рекомендаций по методике конечно-элементного моделирования колебаний систем с сухим трением нет.

**Цель.** Настоящее исследование посвящено отработке методики конечно-элементного моделирования колебаний в демпферах сухого трения на примере пружинного маятника, горизонтально скользящего с трением по горизонтальной плоскости. В частности, представляет интерес сравнительный анализ эффективности явной и неявной схем интегрирования по времени.

**Постановка задачи.** Рассматриваемый пружинный маятник (рис. 2) представляет собой груз массой  $m$ , лежащий на горизонтальной плите и закрепленный на листовой пружине с жесткостью  $k$ . При колебаниях груза обеспечивается постоянный контакт между

грузом и плитой. Возбуждение колебаний производится начальным отклонением маятника по оси  $x$  от точки равновесия на расстояние  $x_0$ .

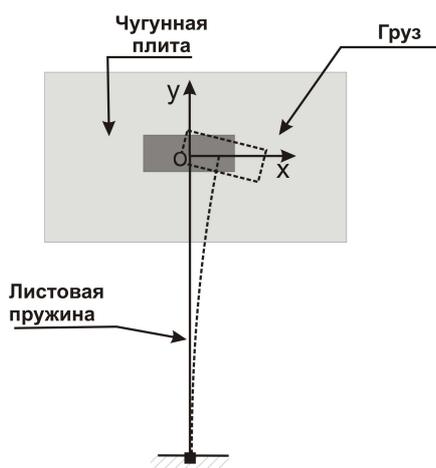


Рис. 1 – Пружинный маятник

При численном моделировании процессов в демпферах сухого трения существенными являются следующие факторы:

- сложная геометрия контактирующих тел, составляющих пару сухого трения;
- деформация контактирующих тел, трехмерное напряженно-деформированное состояние в зоне контакта;
- неизвестная, изменяющаяся во времени в процессе колебаний площадка контакта;
- силы трения и нормального давления в зоне контакта, изменяющиеся во времени;

- динамический характер взаимодействия контактирующих тел в процессе колебаний.

Для того чтобы учесть перечисленные факторы, необходимо рассматривать нестационарную динамическую задачу механики деформируемого твердого тела в 3D-упругой постановке; при этом необходимо учесть в качестве граничных условий нелинейные условия контакта между демпфером и ответными деталями.

**Методика численного моделирования.** Эффективным методом численного моделирования подобных процессов является метод конечных элементов (МКЭ) [3; 6; 8; 10]. В рамках конечно-элементного моделирования поставленная задача описывается матричным уравнением [7]:

$$M\ddot{x}(t) + D\dot{x}(t) + Kx(t) = F(t) + \sum F_f(t), \quad (1)$$

где  $M$ ,  $D$  и  $K$  – матрицы масс, демпфирования и жесткости соответственно,  $x$  – вектор неизвестных узловых перемещений,  $F(t)$  – вектор внешних сил,  $\sum F_f(t)$  – суммарный вектор сил трения на всех контактных поверхностях.

При моделировании динамического контактного взаимодействия в методе конечных элементов в настоящее время наиболее широко применяется метод «пенальти» [9], хорошо алгоритмически согласующийся с расчетом в перемещениях. Идея метода состоит в том, что в расчет условно вводится упругий элемент, расположенный между контактирующими поверхностями и определяющий жесткость взаимодействия или величину контактных сил. Контактная площадка определяется с помощью скалярной функции  $G(x, y, z)$ , описывающей поверхность одного из контактирующих тел. При  $G(x, y, z) > 0$  точки контактирующего тела лежат вне поверхности, при  $G(x, y, z) = 0$  – на поверхности,  $G(x, y, z) < 0$  означает взаимное

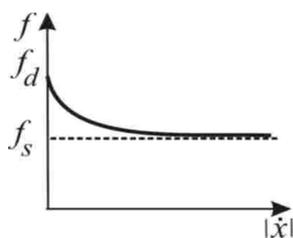
проникновение контактирующих тел. В последнем случае для предотвращения проникновения в соответствующий узел прикладывается противодействующая сила. Согласно методу пены, противодействующая сила пропорциональна величине проникновения сегментов тел друг в друга. Коэффициент пропорциональности имеет смысл эффективной жесткости и называется «коэффициентом пены». Эффективность функционирования алгоритма «пены» зависит от выбора его значения. Высокая нормальная и касательная жесткость необходимы для исключения эффектов проникновения одной контактной поверхности в другую. В то же время их необоснованно завышенные значения способны привести к плохой обусловленности глобальной матрицы жесткости.

Для описания сухого трения будем использовать наиболее распространенную модель Кулона, в соответствии с которой сила трения направлена противоположно вектору скорости и пропорциональна с коэффициентом трения  $f$  силе нормального давления  $N$ . Коэффициент трения примем с учетом влияния относительной скорости трущихся поверхностей  $\dot{x}$  в виде суммы статической  $f_s$  и динамической  $f_d$  составляющих с экспоненциальным переходным участком (рис. 2):

$$f(\dot{x}) = f_d + (f_s - f_d) \cdot \exp(-d_c \cdot |\dot{x}|) , \quad (2)$$

где  $d_c$  – константа модели.

Математическое представление закона Кулона в этом случае имеет вид:



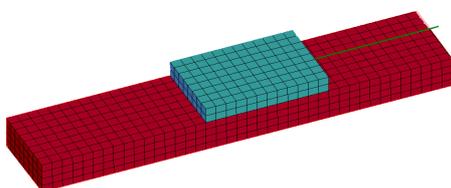
**Рис. 2. Зависимость коэффициента трения от относительной скорости трущихся поверхностей**

$$F_f(\dot{x}) = -f(\dot{x}) \cdot N \cdot \text{sign}(\dot{x}) \quad \text{при } |\dot{x}| > 0 \quad (3)$$

$$|F_f(\dot{x})| \leq F_f(0) \quad \text{при } \dot{x} = 0$$

Для анализа динамических процессов в методе конечных элементов могут быть использованы алгоритмы явного или неявного интегрирования по времени. В настоящей работе колебания осциллятора с сухим трением исследуются с использованием обоих этих алгоритмов с целью сравнительного анализа их эффективности

применительно к задачам фрикционного демпфирования.



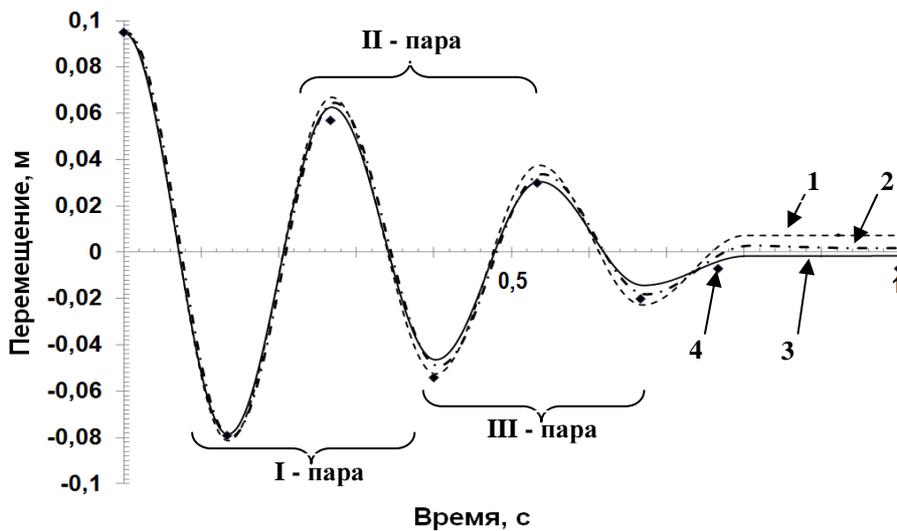
**Рис. 3. Конечно-элементная модель осциллятора.**

Численное моделирование проводилось для следующих

параметров: масса груза  $m = 1$  кг, жесткость пружины  $k = 550$  Н/м, коэффициенты в модели Кулона  $f_s = 0,46$ ,  $f_d = 0,45$ ,  $d_c = 100$ , начальное отклонение  $x_0 = 0,095$  м.

Конечно-элементная модель системы (рис. 3) включала в себя модели груза и плиты, состоящие из призматических изопараметрических элементов второго порядка. Материалы груза и плиты считались линейно упругими. Пружина моделировалась двухузловым линейным упругим элементом. Контактное давление груза на плиту моделировалось распределенной нагрузкой  $p = 5450$  Па.

Результаты численного моделирования в виде зависимости перемещения центра масс груза  $x$  от времени  $t$  приведены на рис. 4. Полученные зависимости  $x(t)$  представляют собой затухающую синусоиду. Как видно из рис. 4, явный и неявный метод интегрирования дали зависимости  $x(t)$ , практически не различающиеся между собой.



**Рис. 4. Зависимости перемещений от времени:** 1 – МКЭ, неявная схема интегрирования по времени; 2 – МКЭ, явная схема интегрирования по времени; 3 – аналитическое решение; 4 – эксперимент.

Существует [9] известное решение задачи о колебаниях с сухим трением системы с одной степенью свободы. Пренебрегая процессами деформации контактирующих тел, считая их абсолютно твердыми, это решение можно использовать для оценки результатов численного моделирования. В рамках этой модели, считая перемещение – происходящим по оси  $x$ , свободные колебания груза можно описать обыкновенным дифференциальным уравнением [5]:

$$m\ddot{x} + kx + F_f = 0, \tag{4}$$

с начальными условиями:

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = 0, \quad (5)$$

где  $F_f(\dot{x})$  – сила трения,  $x$  – перемещение,  $\dot{x}$  – скорость центра масс системы.

При использовании модели Кулона (2), (3) с  $f_s = f_d$  решение (4), (5) представляет собой затухающие колебания с прямолинейной огибающей [5]. В отличие от классического случая вязкого трения, логарифмический декремент колебаний  $\delta$ , определяемый как отношение двух соседних амплитуд  $A_i$  и  $A_{i+1}$  и относительное демпфирование  $\zeta$

$$\delta = \frac{A_i}{A_{i+1}}, \quad \zeta \approx \frac{\delta}{2\pi} \quad (5)$$

становятся величинами непостоянными, увеличивающимися по мере затухания колебаний.

На рис. 4 приведены результаты аналитического решения (4), (5); видно, что они согласуются с результатами численного моделирования.

Для дополнительной проверки результатов численного моделирования проведен специальный эксперимент [4], в котором реализован процесс затухающих колебаний рассмотренного выше объекта (рис. 1). Полученная экспериментально зависимость  $x(t)$ , приведенная на рис. 4, также согласуется с результатами численного моделирования.

Численные значения полученных величин собственных частот колебаний и коэффициентов относительного демпфирования, осредненных по I, II и III парам соседних пиков (рис. 4), полученные численным моделированием по явной и неявной схемам, аналитически из решения (1), (2) и экспериментально, представлены в таблице 1. Расхождение по собственным частотам между аналитическим решением и экспериментом составляет 8,4%, что свидетельствует о согласовании упруго-массовых параметров модели с одной степенью свободы. Расхождение по относительному демпфированию 11,6% свидетельствует об удовлетворительном соответствии эксперименту принятой в расчете модели трения и ее параметров.

**Таблица 1 – Сопоставление расчетных и экспериментальных данных по собственным частотам  $\omega$  и относительному демпфированию  $\zeta$**

Параметр	Эксперимент	Аналитическое решение / расхождение с экспериментом, %	МКЭ, неявный метод / расхождение с экспериментом, % / расхождение с аналитическим решением, %	МКЭ, явный метод / расхождение с экспериментом, % / расхождение с аналитическим решением, %
$\omega, \text{Гц}$	3.74	3.45 / 8,4	3.71/0,8 / 8,5	3.65 / 2,5 / 5,8

$\zeta, \%$	10,06	11.23 / 11,6	8.75 / 13,0 / 28,7	9.98 / 0,8 / 12,5
-------------	-------	--------------	--------------------	-------------------

Численное моделирование дает хорошее совпадение с экспериментом по собственным частотам (расхождение в пределах 2,5%). Менее точные результаты получаются при определении относительного демпфирования (расхождение до 28,7%). Несколько меньшую погрешность определения относительного демпфирования (12,5%) обеспечивает явная схема интегрирования по времени.

Таким образом, моделирование колебательных процессов в системе с сухим трением может эффективно проводиться методом конечных элементов как с явной, так и с неявной схемами интегрирования по времени. Контактное взаимодействие тел, составляющих пару сухого трения, может моделироваться с помощью алгоритма «пенальти», сухое трение – законом Кулона. Несколько более точные результаты определения параметров демпфирования дает явная схема интегрирования по времени.

Полученные результаты предполагается использовать при расчетах демпфирования рабочих лопаток высокоресурсных, высоконагруженных турбин и блисков компрессоров газотурбинных двигателей.

### Список литературы

1. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. – М. : Мир, 1975. – 542 с.
2. Иноземцев.А.А., Нихамкин М.Ш., Сандрацкий В.Л. Газотурбинные двигатели. – М. : Машиностроение, 2008. – Т. 2. – 368 с.
3. Нихамкин М.Ш. и [др.]. Моделирование повреждения посторонними предметами полых лопаток вентилятора ГТД // Известия Самарского научного центра Российской академии наук. – 2011. – Т. 13. – № 1 (2), (39). – С. 326-329.
4. Нихамкин М.Ш. [и др.] Моделирование колебаний осциллятора с сухим трением // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. – Механика. – 2012. – № 2.
5. Тимошенко С.П., Янг Д.Х., Уивер У. Колебания в инженерном деле. – М. : Машиностроение, 1985. 576 с.
6. Cigeroglu E., An, N., Menq, C. H.: A Microslip Friction Model with Normal Load Variation induced by Normal Motion, Nonlinear Dynamics, 2007, Vol. 50(3), pp. 609-626.
7. Laxalde D., Thouverez F., Lombard J-P. Vibration control for integrally bladed disks using friction ring dampers, ASME Turbo Expo 2007. Montreal, Canada.

8. Nikhamkin M., Voronov L., Semenova I. Foreign object damage and fatigue strength loss in compressor blades. Proceedings of ASME Turbo Expo 2008: Power for Land, Sea and Air GT2008. – 2008. – Berlin, GT2008-514931.
9. Fu-Jun Wang, Li-Ping Wang, Jian-Gang Cheng, Zhen-Han Yao. Contact force algorithm in explicit transient analysis using finite-element method. Finite Elements in Analysis and Design 43 (2007). – P. 580–587.
10. G. Weiwei, X. Zili, 3D Numerical friction contact model and its application to nonlinear blade damping, ASME Turbo Expo 2010, GT2010-22292. 8 p.

**Рецензенты:**

Августинович Валерий Георгиевич, доктор технических наук, зам. начальника опытного конструкторского бюро по науке, ОАО «Авиадвигатель», г. Пермь.

Бульбович Роман Васильевич, доктор технических наук, профессор, декан аэрокосмического факультета ПНИПУ, Пермский национальный исследовательский политехнический университет, г. Пермь.