

## ОЦЕНКА ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЙ ДРЕЙФА И СЖАТИЙ ЛЬДА ПО РЕЗУЛЬТАТАМ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Клячкин С. В., Гудкович З. М., Гузенко Р. Б.

*Федеральное государственное бюджетное учреждение «Арктический и Антарктический научно-исследовательский институт» (ФГБУ «АНИИ») Росгидромета. Санкт-Петербург, Россия (199397, С.-Петербург, ул. Беринга, 38). E-mail: svkl@aari.ru, guzenko@aari.ru*

В статье рассматривается метод оценки режимно-статистических характеристик дрейфа и сжатий льда (включая экстремумы малой повторяемости) на основе результатов модельных расчетов. Излагается физико-математическая формулировка модели динамики ледяного покрова. Модель основана на уравнении баланса количества движения ледяного покрова в нестационарной постановке при вязко-пластической параметризации сил внутреннего взаимодействия. Численная реализация модели основана на методе маркеров. С помощью модели выполнена серия расчетов, позволившая получить 1750 матриц с временным осреднением 12 часов. Приводится описание статистических методов оценки экстремумов малой повторяемости, основанных на принципах эллипса рассеяния (для дрейфа льда) и распределений Гумбеля (для сжатий). В заключение представлена физическая интерпретация полученных результатов. Наибольшие значения дрейфа соответствуют самым тонким льдам, наибольшие значения сжатий – однолетним льдам средней толщины.

Ключевые слова: динамика ледяного покрова, дрейф льда, сжатия льда, экстремальные значения малой повторяемости.

## ESTIMATES OF THE EXTREME VALUES OF ICE DRIFT AND PRESSURE BY THE RESULTS OF NUMERICAL MODELING

Klyachkin S. V., Gudkovich Z. M., Guzenko R. B.

*Federal state budgetary institution "Arctic and Antarctic Research Institute" (FSBI "AARI") of Roshydromet. St. Petersburg, Russia (199397, St. Petersburg, Bering street, 38). E-mail: svkl@aari.ru, guzenko@aari.ru*

The method of estimating the statistical characteristics of ice drift and pressure (including the extreme values of low probability) based on the model simulation results is considered in the paper. The physical-mathematical statement of the ice dynamics model is described. The model is based on the non-stationary momentum balance equation with viscous-plastic parameterization of the internal interaction force. The numerical realization of the model is based on the method of markers. The set of simulations carried out with the help of the model allowed obtaining 1750 matrices with 12 hour averaging. The statistical methods of estimating the extreme values of low probability based on the principles of scattering ellipse (for ice drift) and Gumbel distribution (for ice pressure) are described. The conclusions present the interpretation of the results obtained. The maximum values of ice drift correspond to the thinnest ice, while the maximum values of ice pressure correspond to the first year medium ice.

Key words: ice cover dynamics, ice drift, ice pressure, extreme values of low probability.

### Введение

Дрейф и сжатия льда представляют несомненный интерес как с чисто научной, так и с практической точек зрения. В особенности это касается проявления экстремальных случаев, когда создается реальная угроза безопасности морских инженерных объектов и даже людей.

Снижению рисков, связанных с экстремальными проявлениями динамики ледяного покрова, могут способствовать, в частности, заблаговременно выполненные расчеты ожидаемых ледовых условий, позволяющие получить режимно-статистические характеристики интересующего явления. Обычно эта задача решается путем анализа больших массивов натурных наблюдений. Однако нередко данные наблюдений отсутствуют, и в таких случаях

привлекаются данные моделирования: с помощью модели воспроизводятся разные сценарии ледовых и метеорологических условий, результаты модельных расчетов обобщаются, т.е. составляются выборки интересующих характеристик, и эти выборки анализируются с помощью методов математической статистики. Именно этот подход является предметом настоящей статьи.

## Модель

Для решения задачи исследования – получения экстремальных оценок дрейфа и сжатий льда – была использована численная динамико-термодинамическая модель краткосрочного прогноза дрейфа и перераспределения ледяного покрова. Модель предоставляет возможность прогнозировать временную эволюцию основных параметров ледяного покрова: сплоченность (общую и частную), толщину (по каждой возрастной градации), дрейф, сжатия, торошение, разрушенность, положение границ припая (последнее – в экспериментальном порядке) [3].

Представляется, что в данном случае имеет смысл опустить описание термодинамического блока модели и ограничиться характеристикой динамики ледяного покрова.

Динамика ледяного покрова рассчитывается (прогнозируется) на основе уравнения баланса количества движения в нестационарной постановке.

$$M_{\text{л}} \frac{\partial \vec{W}}{\partial t} = \vec{\tau}_a + \vec{\tau}_w + \vec{F}_c + \vec{F}_g + \vec{F}_p \quad (1),$$

где  $W$  – скорость дрейфа льда,  $M_{\text{л}}$  – масса льда в столбике единичной площади,  $\tau_a$ ,  $\tau_w$  – касательные напряжения на верхней и нижней поверхностях льда,  $F_c$  – сила Кориолиса,  $F_g$  – сила, обусловленная наклоном уровня,  $F_p$  – сила внутреннего взаимодействия в ледяном покрове.

Тангенциальные напряжения на верхней и нижней поверхностях льда определяются с помощью квадратичного закона. Сила Кориолиса и проекция силы тяжести на поверхность моря задаются традиционно.

Форма записи слагаемого, описывающего внутренне взаимодействие в ледяном покрове, определяется принятой реологической моделью. В данной модели считается, что ледяной покров проявляет свойства, характерные для вязко-пластических сред.

Вязкое взаимодействие в ледяном покрове подробно рассмотрено в работе [1].

Согласно этой работе, сила внутреннего взаимодействия пропорциональна дивергенции внутренних напряжений. Внутренние напряжения  $\sigma_{\xi\xi}$ ,  $\sigma_{\chi\chi}$ , соответствующие главным осям тензора скоростей деформаций, рассчитываются по формуле:

$$\sigma_{\xi\xi} = K \dot{\varepsilon}_{\xi\xi} \quad \sigma_{\chi\chi} = K \dot{\varepsilon}_{\chi\chi} \quad (2)$$

Параметр К определяется следующим образом:

1)  $K = K_0 H(3C - 2)$  при выполнении каждого из всех следующих условий:

$$C \geq 0.67 \quad \text{div}\bar{W} \leq 0 \quad \dot{\varepsilon}_{\xi\xi} < 0 \quad \dot{\varepsilon}_{\chi\chi} < 0 \quad (3)$$

2)  $K=0$  при невыполнении хотя бы одного из условий (3).

Здесь:

$K_0 = 10^{10}$  кг с<sup>-1</sup> м<sup>-1</sup>,  $\dot{\varepsilon}_{\xi\xi}$ ,  $\dot{\varepsilon}_{\chi\chi}$  - инварианты тензора скоростей деформаций, соответствующие осям  $\xi$ ,  $\chi$  эллипса деформаций,  $C$  – сплоченность льда,  $W$  – скорость дрейфа.

Отличительной особенностью деформирования пластических сред является наличие порогового механизма, т.е. среда деформируется при достаточно больших внешних нагрузках.

Если напряжения, возникающие в ледяном покрове под влиянием пространственной неоднородности дрейфа, превышают некоторый предел, то это может привести к торшению. В данном случае этот предел оценивается как устойчивость ледяной пластины, лежащей на упругом основании, по отношению к продольному изгибу [6]:

$$F_{\text{lim}} = \sqrt{\frac{\rho_w g E H}{12(1 - \mu^2)}} \quad (4)$$

где  $g$  – ускорение силы тяжести,  $E$  – модуль Юнга,  $\mu$  – коэффициент Пуассона.

В том случае, если в данной ячейке происходит торшение, то это означает накопление «лишнего» объема льда (это своего рода аналог пластического течения). Если напряжение недостаточно, то накопления лишнего объема не происходит, т.е. накладывается условие:

$$\text{div}W \geq 0 \quad (5)$$

В этом случае поле дрейфа итеративно корректируется в соответствии с условием (5).

Описанный принцип по существу имитирует пластическое поведение ледяного покрова [4].

На твердой границе при нажимном дрейфе нормальная к берегу компонента равна нулю, касательная компонента дрейфа трансформируется в зависимости от угла между направлением дрейфа и направлением береговой черты. На жидкой границе напряжения равны нулю.

На границах расчетной области при дрейфе, направленном внутрь расчетной области, градиенты сплоченности (общей и частной) и скорости равны нулю; при выносном дрейфе градиенты сплоченности и скорости на границе равны соответствующим градиентам в ближайшей внутренней ячейке.

Численная схема модели построена на основе регулярной сетки с пространственным шагом от 5 до 100 км в зависимости от размеров расчетной области. Временной шаг составляет 10 минут, что соответствует условию Курранта.

Ледяной покров представлен набором маркеров, каждый из которых характеризуется пространственными координатами в декартовой системе, толщиной, торосистостью и скоростью.

Расчет дрейфа льда основан на лагранжевском методе. Для каждого маркера определяются скорость и перемещение через каждые 10 минут.

Силы внутреннего взаимодействия, возникающие при дрейфе, определяются в соответствии с эйлеровским подходом и считаются одинаковыми в пределах ячейки.

Использование метода маркеров позволяет автоматически выполнять условие сохранения массы и полностью исключить проблемы, связанные с вычислительной вязкостью.

С помощью модели было выполнено 125 недельных расчетных серий, что позволило получить 1750 расчетных матриц, характеризующих дрейф и сжатия льда с 12-часовым усреднением. В качестве начальных условий расчетов использовались ледовые карты юго-западной части Карского моря за разные годы и месяцы, что позволило учесть практически весь спектр изменчивости ледовых условий: начало зимы, максимальное развитие ледяного покрова, весеннее таяние льда, холодные зимы, теплые зимы, сильные штормы и т.д.

### **Получение режимно-статистических характеристик**

Из каждой расчетной матрицы выбираются значения дрейфа и сжатий льда в заданных ячейках. Эти значения группируются по максимальной толщине льда, присутствующей в данной ячейке, и по направлению дрейфа. В результате получается некоторое количество выборок дрейфа и сжатий, причем каждая выборка соответствует определенному диапазону максимальной толщины льда при заданных направлениях дрейфа.

Оценки экстремального дрейфа малой повторяемости могут быть получены с помощью широко применяемого метода «эллипса рассеивания» [5].

Положение центра эллипса определяется модулем среднего результирующего вектора скорости  $W_r$  и его направлением  $\theta$ .

$$W_r = \sqrt{W_x^2 + W_y^2}; \quad \Theta = \arccos \frac{W_x}{W_r} \quad (6)$$

Направление  $\beta$  большой оси эллипса рассеивания отсчитывается от оси  $y$  по часовой стрелке и находится по формуле:

$$\operatorname{tg} 2\beta = \frac{2\sigma_x \sigma_y r}{\sigma_y^2 - \sigma_x^2} \quad (7)$$

Главные среднеквадратические отклонения, т.е. среднеквадратические отклонения проекций скоростей дрейфа на главные оси эллипса определяются выражением:

$$\begin{aligned}\sigma_{\xi} &= \sqrt{\sigma_x^2 \sin^2 \beta + r\sigma_x\sigma_y \sin 2\beta + \sigma_y^2 \cos^2 \beta} \\ \sigma_{\eta} &= \sqrt{\sigma_x^2 \cos^2 \beta - r\sigma_x\sigma_y \sin 2\beta + \sigma_y^2 \sin^2 \beta}\end{aligned}\quad (8)$$

В формулах (6–8) приняты обозначения:

$W_x, W_y$  – средние значения проекций вектора скорости дрейфа на оси  $x$  и  $y$ ;

$\sigma_x, \sigma_y$  – соответствующие им среднеквадратические отклонения;

$r$  – коэффициент корреляции между проекциями скоростей дрейфа на оси  $x$  и  $y$ .

Эллипс рассеивания, полуоси которого равны величинам  $\sigma_{\xi}$  и  $\sigma_{\eta}$ , называется единичным.

Вероятность попадания случайного вектора в такой эллипс составляет примерно 39,3 %. В том случае, когда необходимо получить оценку более высокой вероятности попадания вектора в эллипс, длина оси должна быть увеличена. Коэффициент увеличения оси эллипса

$C_f$  в зависимости от вероятности попадания вектора в эллипс находится по формуле:

$$C_f = 1 + \frac{(p - 39,3)}{28,5(100 - p)^{0,1}} \quad (9)$$

где  $p$  – вероятность попадания вектора в эллипс.

Далее, зная все необходимые параметры эллипса, легко получить оценки экстремальной скорости дрейфа заданной вероятности по любому направлению.

Оценки экстремальных сжатий малой повторяемости можно получить с помощью широко применяемого распределения Гумбеля [2]. Общий вид этого распределения задается выражением

$$P(x) = \exp[-e^{-a(x-u)}], \quad (10)$$

где  $a, u$  – параметры распределения, причем  $a > 0, u > 0$ .

$$a = \frac{\sigma_N}{\sigma_x}, \quad u = x_m - \frac{1}{a} y_N, \quad (11)$$

где  $x_m$  – среднее выборки,  $\sigma_x$  – среднеквадратическое отклонение выборки,  $\sigma_N$  и  $y_N$  берутся из стандартных таблиц.

Нередко экстремальные значения малой повторяемости требуется выразить в терминах «1 раз в  $N$  лет». Соответствие между вероятностью, выраженной в процентах (или долях единицы), и обеспеченностью «1 раз в  $N$  лет» можно получить, оценив максимально возможное число случаев. Например, если речь идет о дрейфе льда с полусуточным осреднением, то в месяц возможно примерно 60 случаев, за год –  $60 \times L$ , где  $L$  – количество месяцев ледового сезона и т.д.

В таблицах 1–2 показаны примеры расчетных значений экстремального дрейфа и сжатий льда в юго-западной части Карского моря.

Таблица 1. Экстремальный дрейф

Толщина, м	Ср. модуль, м/с	Ст. отклонение, м/с	Экстремальный дрейф (м/с), возможный 1 раз в ...					
			1 год	5 лет	10 лет	20 лет	50 лет	100 лет
< 0,30	0,15	0,13	0,73	0,89	0,96	1,03	1,13	1,20
0,30-0,70	0,12	0,13	0,67	0,84	0,91	0,98	1,07	1,14
0,70-1,20	0,11	0,11	0,59	0,73	0,79	0,85	0,93	0,98
1,20-1,50	0,10	0,10	0,48	0,61	0,66	0,72	0,79	0,84
> 1,50	0,08	0,06	0,32	0,40	0,43	0,46	0,50	0,54

Таблица 2. Экстремальное сжатие

Толщина, м	Ср. модуль, кПа	Ст. отклонение, кПа	Экстремальное сжатие (кПа), возможное 1 раз в ...					
			1 год	5 лет	10 лет	20 лет	50 лет	100 лет
< 0,30	5,2	8,7	43,8	54,7	59,3	64,0	70,2	74,9
0,30-0,70	7,9	10,5	53,6	66,7	72,4	78,1	85,5	91,2
0,70-1,20	8,7	12,8	63,4	79,5	86,5	93,4	102,6	109,5
1,20-1,50	5,7	10,0	45,7	58,3	63,7	69,1	76,2	81,6
> 1,50	8,0	8,9	42,2	53,4	58,3	63,1	69,5	74,3

### Заключение

Оценки экстремального дрейфа составляют от 0,5–0,7 м/с (1 раз в год) до 0,6–1,2 м/с (1 раз в 100 лет). Понятно, что наибольшие значения дрейфа соответствуют самым тонким льдам, а наименьшие – самым толстым. В целом этот результат можно признать вполне реальным. При этом надо иметь в виду, что речь идет о дрейфе, осредненном за 12-часовые периоды. Это означает, что кратковременные усиления дрейфа, связанные, прежде всего, с приливными явлениями, в данном случае не учитываются.

Экстремальные сжатия составляют от 40–65 кПа (1 раз в год) до 75–110 кПа (1 раз в 100 лет). Несколько неожиданной оказалась зависимость сжатий от толщины льда: с увеличением толщины сжатия увеличиваются, достигают максимума при толщине льда 0,7–1,2 м (однолетний лед средней толщины), а затем, по мере дальнейшего роста толщины сжатия, снижаются. Этот эффект, по всей видимости, объясняется тем, что при толщине льда 70–120 см создается такое сочетание толщины и подвижности льда, которое наиболее «благоприятно» для возникновения сильных сжатий. При толщинах менее 70 см лед не может создать мощное давление из-за малой массы, а при толщинах более 120 см лед менее подвижен, что также препятствует росту сжатий.

Как и для дрейфа, в данном случае речь идет об экстремальных сжатиях, осредненных за 12-часовые периоды. Известно, что кратковременные локальные сжатия могут достигать гораздо бóльших значений (возможно – на 1–2 порядка, что сопоставимо с пределом прочности льда), но на данный момент сложно делать какие-либо предположения о характере количественной связи между осредненными и локальными кратковременными сжатиями.

Подводя итог, можно констатировать, что в целом статистический анализ результатов массовых модельных расчетов дает вполне реалистические оценки.

### Список литературы

1. Аппель И. Л., Гудкович З. М. Численное моделирование и прогноз эволюции ледяного покрова арктических морей в период таяния. – Л.: Гидрометеоздат, 1992. – 143 с.
2. Гумбель Э. Статистика экстремальных значений. – М.: Мир, 1965. – 586 с.
3. Клячкин С. В., Гудкович З. М. Методика среднесрочного ледового прогноза для Печорского моря на основе численной динамико-термодинамической модели // Информационный сборник ГМЦ РФ. – 2005. – № 31. – С. 104-119.
4. Клячкин С. В., Гудкович З. М., Май Р. И., Фролов С. В. Сжатия льдов // Опасные ледовые явления для судоходства в Арктике. – СПб.: ААНИИ, 2010. – С.33-91.
5. Рекомендации по расчету максимальной скорости дрейфа льда в шельфовой зоне морей СССР. – Л.: ААНИИ, 1984. – 51 с.
6. Хейсин Д. Е., Ивченко В. О. Распространение ледовых сжатий в сплоченных льдах // Океанология. – 1975. – XV (5). – С. 803-812.

*Работа проводилась при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ в рамках ФЦП «Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технологического комплекса России на 2007–2013 годы» по государственному контракту № 16.515.11.5074*

### Рецензенты:

Смирнов Виктор Николаевич, доктор физико-математических наук, заведующий лабораторией физики льда, ФГБУ «ААНИИ», Санкт-Петербург.

Воинов Геннадий Николаевич, доктор географических наук, старший научный сотрудник, ФГБУ «ААНИИ», Санкт-Петербург.