

УДК 519.2:005.931.11

МОДЕЛЬ ТЕХНОГЕННОГО РИСКА С УЧЕТОМ ЗАВИСИМОСТИ МЕЖДУ ВЕРОЯТНОСТЬЮ ИСХОДНЫХ СОБЫТИЙ И УЩЕРБОМ

Острейковский В. А., Шевченко Е. Н.

ГБОУ ВПО Сургутский государственный университет ХМАО-Югры, ул. Ленина, 1, Сургут, Россия, e-mail: elenan_27@mail.ru

Работа содержит подход к анализу риска технических систем с использованием аппарата двумерных вероятностных распределений. Риск рассматривается как функция двух случайных величин: вероятности исходных событий аварий и ущерба от них. Вероятность и ущерб при этом считаются связанными убывающей линейной зависимостью. Аналитически получены функции плотности распределения риска для различных законов распределения случайной величины вероятности. Рассмотрены законы распределения: Гаусса, Вейбулла, Стьюдента, Рэлея, экспоненциальное и другие. Найдены значения функции плотности распределения риска с помощью численного интегрирования. Исследована зависимость функции плотности распределения риска от параметров распределений вероятности и ущерба. Полученные функции могут быть использованы для построения методики оценки риска технических систем.

Ключевые слова: риск, плотность распределения, функция случайных величин, вероятность исходных событий аварий, ущерб, оценка риска.

MATHEMATICAL MODELLING OF TECHNICAL RISK IN ASSUMPTION OF THE LINEAR DEPENDENCE BETWEEN LOSSES AND PROBABILITY

Ostreykovskiy V. A., Shevchenko E. N.

Surgut State University, Lenin st., 1, Surgut (Russia), e-mail: elenan_27@mail.ru

This paper contains an approach to risk assessment in technical systems using two-dimensional distribution theory. The risk is considered as function of two stochastic variables: probability and losses in case of their decreasing linear dependence. Analytical expressions for density distribution of risk are given depending on various distributions of probabilities. The study involves such distributions of variate probability as Gaussian, Weibull, Student, Rayleigh, exponential etc. Numerical values are found for density distribution of risk with the aid of numerical integration. The study tested risk dependence on the values of probability distribution parameters. The functions obtained can be used to construct a methodology of risk assessment in technical systems.

Keywords: risk, probability, losses, risk assessment, two-dimensional distribution function.

Введение

Безопасность технических систем всесторонне изучается в настоящее время целым рядом исследователей. Техногенный риск, в свою очередь, является основным количественным показателем безопасности систем.

В математическом моделировании риска преобладающей моделью является модель многомерной (не меньше двух компонент) случайной величины.

В данной статье рассмотрены результаты моделирования риска как функции случайных величин вероятности исходных событий аварий Q и ущерба от них C при их линейной связи.

Постановка задачи

Рассмотрим риск R , вероятность исходных событий аварий Q и ущерб C как случайные величины (СВ).

Допустим, что ущерб есть функция вероятности исходных событий:

$$c = \alpha(q),$$

при этом вероятность Q – есть СВ с плотностью распределения $f_Q(q)$, а СВ R связана с Q и C функциональной зависимостью $R = Q \cdot C$. Требуется найти закон распределения величины R .

Модель риска

Если $\alpha(q)$ является непрерывной, дифференцируемой, монотонной и имеет обратную функцию α^{-1} , то функция распределения СВ ущерба от неблагоприятного события при монотонно убывающей α примет вид:

$$F_C(c) = P(C < c) = P(q < Q \leq 1) = \int_q^1 f_Q(q) dq = \int_{\alpha^{-1}(c)}^1 f_Q(q) dq,$$

где $f_Q(q)$ – плотность распределения СВ вероятность исходного события с областью определения

$$W_I : \begin{cases} 0 \leq c < \alpha(q); \\ 0 \leq q \leq 1. \end{cases} \quad (1)$$

Отсюда плотность распределения C равна для α монотонно убывающей:

$$f_C(c) = F'_C(c) = -f_Q[\alpha^{-1}(c)] (\alpha^{-1}(c))'. \quad (2)$$

Найдем плотность распределения ущерба в случае его линейной зависимости от вероятности исходных событий

$$c = \alpha(q) = -k_1 q + k_0, \quad (3)$$

где k_0 и k_1 – коэффициент смещения и угловой коэффициент линейной зависимости соответственно.

Тогда условная плотность вероятности ущерба при линейной зависимости C от Q согласно (2) связана с плотностью распределения Q :

$$f_{C/Q}(c) = f_Q\left(\frac{k_0 - c}{k_1}\right) \left(\frac{1}{k_1}\right), \quad k_1 \neq 0. \quad (5)$$

Далее функция распределения риска равна

$$\begin{aligned} F_R(q, c) &= \iint_{W_I} f_{C/Q}(c) f_Q(q) dc dq = \iint_{W_I} f_Q\left(\frac{k_0 - c}{k_1}\right) \left(\frac{1}{k_1}\right) \cdot f_Q(q) dc dq = \\ &= \left(\frac{1}{k_1}\right) \iint_{W_I} f_Q\left(\frac{k_0 - c}{k_1}\right) \cdot f_Q(q) dc dq. \end{aligned} \quad (6)$$

Так как область интегрирования задается выражением (1), то

$$F_R(q, c) = \frac{1}{k_1} \int_0^1 \int_0^{\alpha(q)} f_Q \left(\frac{k_0 - c}{k_1} \right) f_Q(q) dc dq. \quad (7)$$

Поскольку $r = q \cdot c = q \cdot \alpha(q)$, преобразуем формулу (7) к виду, содержащему переменную r :

$$F_R \left(q, \frac{r}{q} \right) = \frac{1}{k_1} \int_0^1 \int_0^{r/q} f_Q \left(\frac{k_0 - r/q}{k_1} \right) f_Q(q) d \frac{r}{q} dq, \quad k_1 > 0, \quad (8)$$

откуда после дифференцирования по r следует выражение для плотности распределения риска f_R :

$$f_R(r) = F'_R(r) = \frac{1}{k_1} \int_0^1 \frac{1}{q} f_Q \left(\frac{k_0 - r/q}{k_1} \right) f_Q(q) dq, \quad k_1 > 0. \quad (9)$$

В соответствии с (9) получены выражения для плотности вероятности риска при различных распределениях случайной величины вероятности, которые приведены в табл. 1.

Таблица 1

Вид зависимостей плотности распределения риска при различных законах распределения СВ Q

Функция линейной зависимости ущерба от вероятности $c = \alpha(q) = -k_1 q + k_0$	
Распределение СВ вероятности Q	Функция плотности распределения риска $f_R(r)$
Нормальное	$f_R(r) = \frac{1}{2\pi\sigma_Q^2 k_1} \int_0^1 \frac{1}{q} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_Q^2} \left[\left(\frac{k_0 - r/q}{k_1} - m_Q \right)^2 + (q - m_Q)^2 \right] \right\} dq, \quad k_1 > 0.$
Логарифмически нормальное	$f_R(r) = \frac{1}{2\pi\sigma_Q^2 k_1} \int_0^1 \frac{k_1}{q^2 (k_0 - r/q)} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_Q^2} \left[\left(\ln \left(\frac{k_0 - r/q}{k_1} \right) - m_Q \right)^2 + (\ln q - m_Q)^2 \right] \right\} dq, \quad k_1 > 0.$
Вейбулла	$f_R(r) = \frac{(\alpha_Q \lambda_Q)^2}{k_1^{\alpha_Q}} \int_0^1 \frac{1}{q} (q(k_0 - r/q))^{\alpha_Q - 1} \exp \left\{ -\lambda_Q \left[q^{\alpha_Q} + \left(\frac{k_0 - r/q}{k_1} \right)^{\alpha_Q} \right] \right\} dq, \quad k_1 > 0.$
Экспоненциальное	$f_R(r) = \frac{\lambda_Q^2}{k_1} \int_0^1 \frac{1}{q} \exp \left\{ -\lambda_Q \left[q + \left(\frac{k_0 - r/q}{k_1} \right) \right] \right\} dq, \quad k_1 > 0.$
Рэлея	$f_R(r) = \frac{1}{k_1^2 \sigma_Q^4} \int_0^1 (k_0 - r/q) \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_Q^2} \left[q^2 + \left(\frac{k_0 - r/q}{k_1} \right)^2 \right] \right\} dq, \quad k_1 > 0.$
Стьюдента	$f_R(r) = \frac{\Gamma^2 \left(\frac{n_Q + 1}{2} \right)}{k_1 \pi n_Q \Gamma^2 \left(\frac{n_Q}{2} \right)} \int_0^1 \frac{1}{q} \left[1 + \frac{(k_0 - r/q)^2}{n_Q k_1^2} \right]^{-\frac{n_Q + 1}{2}} \left[1 + \frac{q^2}{n_Q} \right]^{-\frac{n_Q + 1}{2}} dq, \quad k_1 > 0.$

Усеченное нормальное	$f_R(r) = \frac{1}{2\pi\sigma_Q^2 k_1 \left[\Phi\left(\frac{1-m_Q}{\sigma_Q}\right) - \Phi\left(-\frac{m_Q}{\sigma_Q}\right) \right]^2} \times$ $\times \int_0^1 \frac{1}{q} \exp\left\{ -\frac{1}{2\sigma_Q^2} \left[\left(\frac{k_0 - r/q}{k_1} - m_Q \right)^2 + (q - m_Q)^2 \right] \right\} dq,$ <p style="text-align: center;">$k_1 > 0.$</p>
----------------------	--

Выбор законов распределения СВ вероятности обусловлен практикой исследований в сфере безопасности технических систем [3,5]. Распределения Гаусса (нормальное), логарифмически нормальное, Вейбулла, Рэлея описывают развитие отказов и дефектов в различных технических системах (например, различные элементы ядерных реакторов, коррозия металлов, наработка на отказ электронных элементов). Нетрадиционное для подобных задач распределение Стьюдента взято потому, что обладает тяжелыми хвостами, более соответствующими поведению «редких» аварийных событий.

План модельного эксперимента для определения значений вероятности Q , распределенной по закону Вейбулла, приведен в табл.2.

Таблица 2

Значения параметров плотности распределения вероятности Q

	Угловой коэффициент k_l	Коэффициент смещения k_0	Коэффициент λ_q	Коэффициент α_q								
				0,1	0,5	0,9	1,1	1,5	1,9	2,1	2,5	2,9
1	10 ⁷	10 ⁵	10 ⁻⁴	0,1	0,5	0,9	1,1	1,5	1,9	2,1	2,5	2,9
2			10 ⁻⁵	0,1	0,5	0,9	1,1	1,5	1,9	2,1	2,5	2,9
3			10 ⁻⁶	0,1	0,5	0,9	1,1	1,5	1,9	2,1	2,5	2,9
4			10 ⁻⁷	0,1	0,5	0,9	1,1	1,5	1,9	2,1	2,5	2,9
5	10 ⁸	10 ⁵	10 ⁻⁴	0,1	0,5	0,9	1,1	1,5	1,9	2,1	2,5	2,9
6			10 ⁻⁵	0,1	0,5	0,9	1,1	1,5	1,9	2,1	2,5	2,9
7			10 ⁻⁶	0,1	0,5	0,9	1,1	1,5	1,9	2,1	2,5	2,9
8			10 ⁻⁷	0,1	0,5	0,9	1,1	1,5	1,9	2,1	2,5	2,9
9	10 ¹⁰	10 ⁶	10 ⁻⁴	0,1	0,5	0,9	1,1	1,5	1,9	2,1	2,5	2,9
10			10 ⁻⁵	0,1	0,5	0,9	1,1	1,5	1,9	2,1	2,5	2,9
11			10 ⁻⁶	0,1	0,5	0,9	1,1	1,5	1,9	2,1	2,5	2,9
12			10 ⁻⁷	0,1	0,5	0,9	1,1	1,5	1,9	2,1	2,5	2,9
13	10 ¹¹	10 ⁶	10 ⁻⁴	0,1	0,5	0,9	1,1	1,5	1,9	2,1	2,5	2,9
14			10 ⁻⁵	0,1	0,5	0,9	1,1	1,5	1,9	2,1	2,5	2,9
15			10 ⁻⁶	0,1	0,5	0,9	1,1	1,5	1,9	2,1	2,5	2,9
16			10 ⁻⁷	0,1	0,5	0,9	1,1	1,5	1,9	2,1	2,5	2,9

При выборе параметров распределений авторы руководствовались следующими соображениями. Для распределения Вейбулла значения λ_q от 10⁻⁴ и ниже, т.к. события считаются редкими, а значения α_q взяты во всех трех интервалах: (0;1), (1;2), (2;∞). (см., например, [4]). Коэффициенты линейной зависимости оценены на основании данных [1].

Результаты моделирования и их анализ

Модельный эксперимент проведен на ЭВМ в среде вычислительного пакета Maple.

1. В статье приведены полученные значения функции плотности вероятности риска $f_R(r)$ для распределения вероятности исходных событий по закону Вейбулла. Поведение функций плотности риска иллюстрируют приведенные диаграммы в логарифмическом и обычном масштабах (рис.1–5).

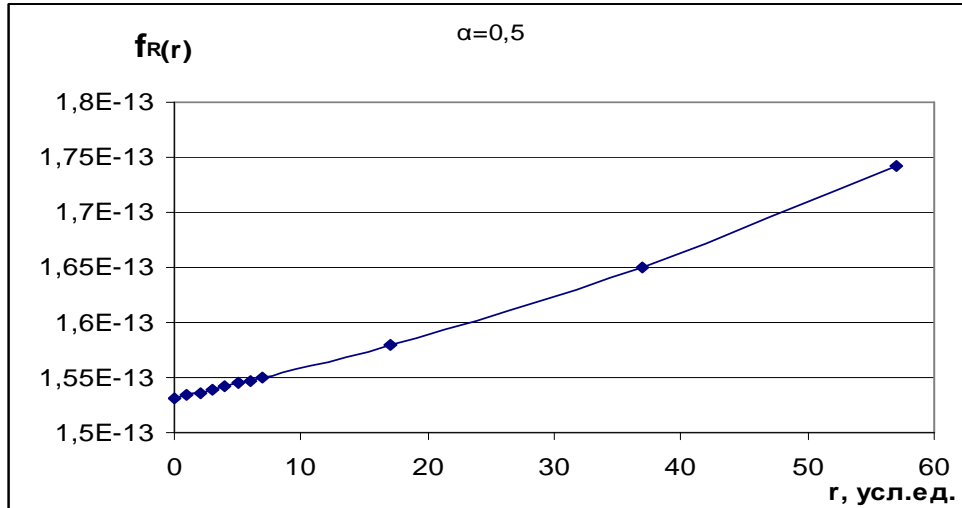


Рис. 1. Плотность распределения риска при $0 < \alpha_q < 1$

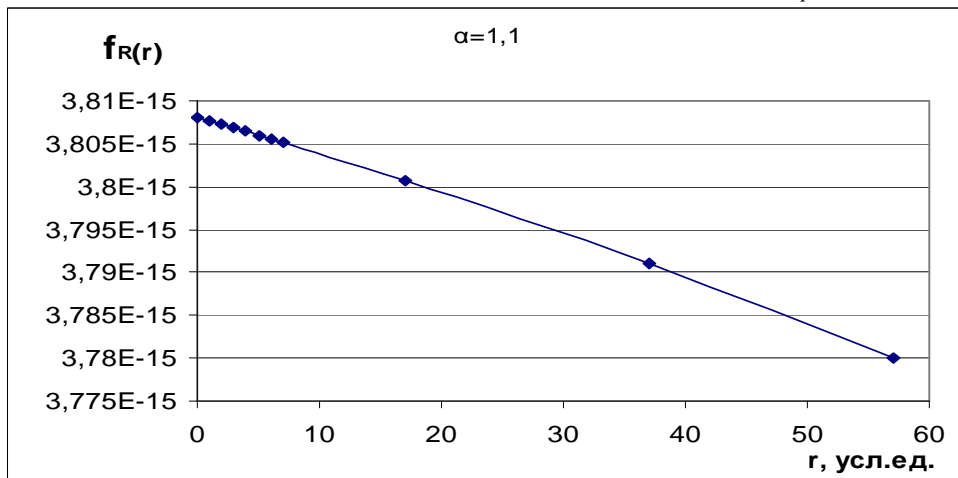


Рис. 2. Плотность распределения риска при $1 < \alpha_q < 2$ и при $2 < \alpha_q < 3$

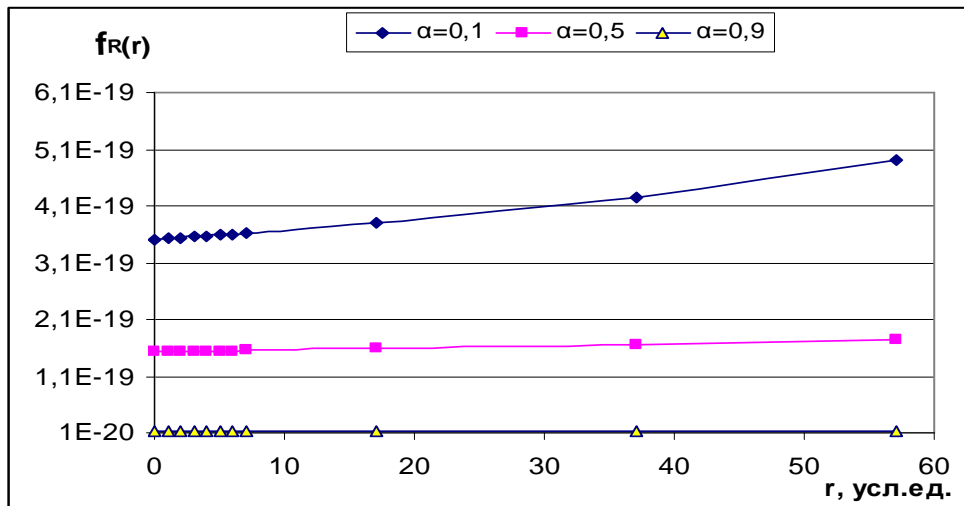


Рис. 3. Зависимость плотности распределения риска от значения $0 < \alpha_q < 1$ при $k_1=10^7, k_0=10^5, \lambda_q = 10^{-7}$

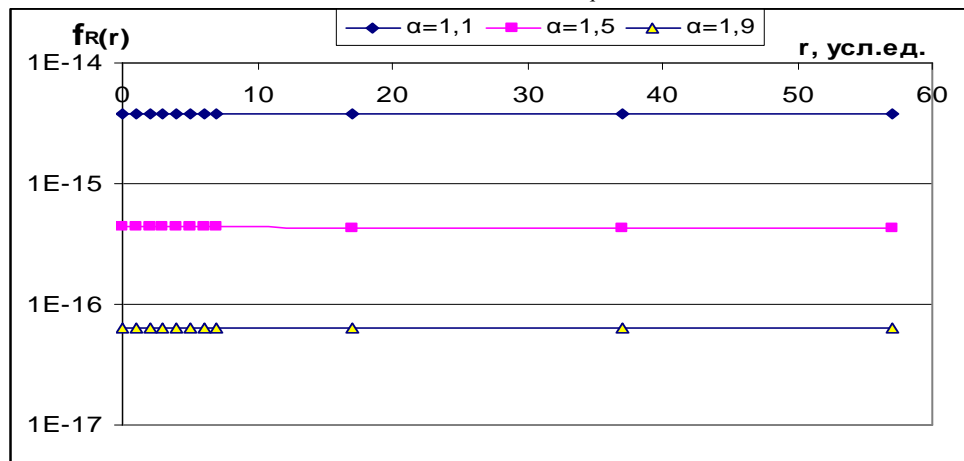


Рис. 4. Зависимость плотности распределения риска от значения $1 < \alpha_q < 2$ при $k_1=10^7, k_0=10^5, \lambda_q = 10^{-4}$

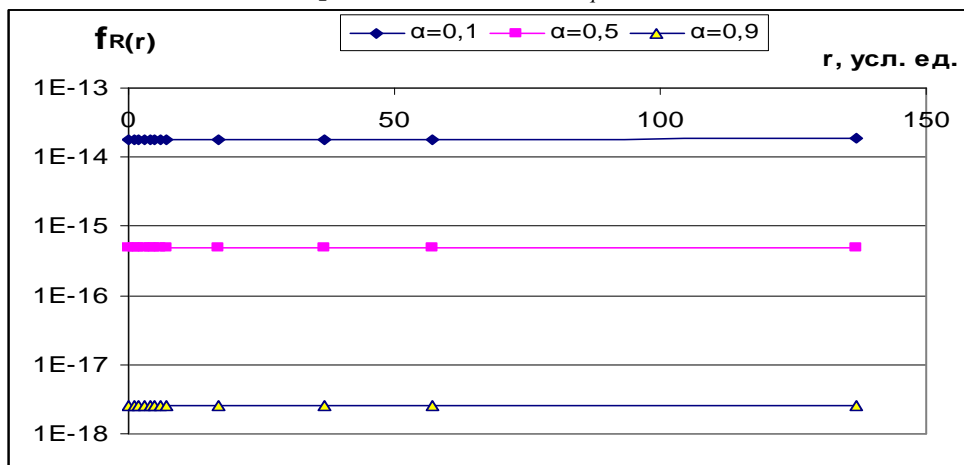


Рис. 5. Зависимость плотности распределения риска от значения $0 < \alpha_q < 1$ при $k_1=10^{11}, k_0=10^6, \lambda_q = 10^{-4}$

2. Данное исследование выполнялось в рамках гранта РФФИ (проект 11-01-00008). Исследовано влияние значений параметров закона распределения вероятности α_q и λ_q и коэффициентов линейной зависимости k_1 и k_0 на поведение функции плотности распреде-

ления риска $f_R(r)$. При этом значения функций $f_R(r)$ табулированы на интервале $[0;57]$, но в данной статье приводятся не полностью из-за ограниченности объема публикации.

3. Анализ результатов при распределении вероятности по закону Вейбулла

Проанализируем влияние параметров распределения СВ Q и линейной зависимости на свойства плотности распределения риска. Рассмотрим отдельно поведение функции плотности риска на интервалах по параметру α : (0;1), (1;2), (2;4).

- 1) Функция плотности распределения риска $f_R(r)$ медленно возрастает (рис.1) при $\alpha_q \in (0;1)$ и медленно убывает (рис.2) при $\alpha_q \in (1;2)$ и $\alpha_q \in (2;4)$.
- 2) При увеличении значения параметра α_q от меньшего к большему на каждом интервале по α_q значения функции уменьшаются по величине на 1–2 порядка (рис.4), и скорость роста функции замедляется (рис.3).
- 3) При увеличении коэффициентов линейной зависимости k_1 и k_0 увеличивается разница между значениями функции до 3–4 порядков (рис.5) при изменении α_q .
- 4) При прочих фиксированных параметрах изменение λ_q (уменьшение на порядок в интервале от $\lambda_q = 10^{-4}$ до $\lambda_q = 10^{-7}$) приводит к уменьшению значений функции плотности ровно на 2 порядка (почти без изменения мантиссы) (табл. 3).

Таблица 3

Изменение значений функции плотности при уменьшении λ_q

при $k_1=10^{11}, k_0=10^6, \alpha_q=0,1$				
r	$f_R(r)$			
	$\lambda=10^{-4}$	$\lambda=10^{-5}$	$\lambda=10^{-6}$	$\lambda=10^{-7}$
0	1,75732E-14	1,75746E-16	1,75748E-18	1,75748E-20
1	1,75808E-14	1,75821E-16	1,75823E-18	1,75823E-20
2	1,75883E-14	1,75897E-16	1,75898E-18	1,75898E-20
3	1,75958E-14	1,75972E-16	1,75973E-18	1,75974E-20
4	1,76033E-14	1,76047E-16	1,76049E-18	1,76049E-20
при $k_1=10^{11}, k_0=10^6, \alpha_q=1,1$				
r	$f_R(r)$			
	$\lambda=10^{-4}$	$\lambda=10^{-5}$	$\lambda=10^{-6}$	$\lambda=10^{-7}$
0	1,9086E-19	1,90863E-21	1,90863E-23	1,90864E-25
1	1,90858E-19	1,90861E-21	1,90863E-23	1,90861E-25
2	1,90856E-19	1,90859E-21	1,90859E-23	1,90859E-25
3	1,90854E-19	1,90857E-21	1,90857E-23	1,90857E-25
4	1,90852E-19	1,90855E-21	1,90855E-23	1,90855E-25
при $k_1=10^{11}, k_0=10^6, \alpha_q=2,1$				
r	$f_R(r)$			
	$\lambda=10^{-4}$	$\lambda=10^{-5}$	$\lambda=10^{-6}$	$\lambda=10^{-7}$
0	1,26711E-24	1,26715E-26	1,26715E-28	1,26715E-30
1	1,2671E-24	1,26714E-26	1,26714E-28	1,26714E-30
2	1,26709E-24	1,26713E-26	1,26713E-28	1,26714E-30
3	1,26708E-24	1,26712E-26	1,26713E-28	1,26713E-30
4	1,26708E-24	1,26712E-26	1,26712E-28	1,26712E-30

Сравнительный анализ таблицы 3 показывает зависимость значений функции плотности распределения риска от изменений интервала по параметру α_q . Переход по интервалам значений α_q сопровождается уменьшением значений $f_R(r)$ на 5 порядков.

Заключение

Таким образом, в статье получены следующие результаты:

- новые аналитические выражения для определения плотности распределения риска при линейно зависимых случайных величинах вероятности исходных событий и ущерба;
- найдены численные значения функции плотности $f_R(r)$ для различных законов распределения случайной величины Q ;
- проведен анализ влияния значений параметров распределения СВ Q на характеристики плотности вероятности риска.

Список литературы

1. Акимов, В. А. Надежность технических систем и техногенный риск / В. А. Акимов, В. Л. Лапин, В. М. Попов, В. А. Пучков, В. И. Томаков, М. И. Фалеев/ Под общ. ред. М. И. Фалеева. – М.: Деловой экспресс, 2002. – 368 с.
2. Глухов, В. В. Превентивный менеджмент чрезвычайных ситуаций / В. В. Глухов, В. Ю. Агапитов, К. А. Дубаренко. – СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2008. – 350 с.
3. Кобзарь А.И. Прикладная математическая статистика. Для инженеров и научных работников. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 816 с.
4. Острейковский, В. А. Старение и прогнозирование ресурса оборудования атомных станций / В. А. Острейковский. – М.: Энергоатомиздат, 1994. – 288 с.
5. Острейковский, В. А. Математическое моделирование техногенного риска / В. А. Острейковский, А. О. Генюш, Е. Н. Шевченко; Сургут. гос. ун-т ХМАО-Югры. – Сургут: ИЦ СурГУ, 2010. – 83 с.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (проект 11-01-00008)

Рецензенты:

Галкин Валерий Алексеевич, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой прикладной математики Обнинского института атомной энергетики научно-исследовательского ядерного университета МИФИ Министерства образования и науки Российской Федерации, г. Обнинск.

Григорьев Леонид Иванович, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой автоматизированных систем управления Российского государственного университета имени И. М. Губкина Министерства образования и науки Российской Федерации, г. Москва.