УДК 371.3:519.2:004+371.3:519.24:004

ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В ОБУЧЕНИИ УЧАЩИХСЯ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКЕ

Далингер В. А.

ФГБОУ ВПО «Омский государственный педагогический университет», Омск, Россия (644099, г. Омск, набережная Тухачевского, 14) dalinger@omgpu.ru

В настоящее время актуальнейшей задачей является информатизация всех сфер деятельности человека, в том числе и образования. Информатизации подлежат как сфера управления системой образования, так и организация учебного процесса. Информатизация должна затронуть организацию учебно-познавательной деятельности обучающихся и организацию обучающей деятельности учителя. Информационные технологии эффективны уже потому, что компьютер позволяет производить быстрые расчеты, работать с большим объемом информации, визуализировать учебный материал, организовывать «виртуальные математические эксперименты» и др. В статье рассмотрены различные применения инновационных технологий в обучении учащихся теории вероятностей и математической статистике, они касаются и моделирования компьютерных экспериментов по проблемам вероятности и статистики, и решения задач на вычисление численных значений вероятностей, и на построение графиков вероятностных зависимостей и т. д.

Ключевые слова: теория вероятностей, математическая статистика, информационные технологии, компьютерные эксперименты.

INFORMATION TECHNOLOGIES IN TEACHING STUDENTS PROBABILITY THEORY AND MATHEMATICAL STATISTICS

Dalinger V. A.

FSBEI HPE Omsk State Pedagogical University, Omsk, Russia (644 099, Omsk, Tukhachevskogo emb., 14), e-mail: dalinger@omgpu.ru

Nowadays informatization of all the spheres of human activities, including education, is one of the most actual tasks. Informatization is the subject to the sphere of education management as well as the organization of the educational process. Informatization should affect the organization of the educational and cognitive activity of students and the organization of the teaching activity of a teacher. Information technologies are effective even due to the fact that a computer gives an opportunity to make calculations quickly, work up a great amount of information, visualize teaching materials, organize “virtual mathematical experiments” etc. In the following article we consider various uses of innovation techniques in teaching probability theory and mathematical statistics to students. These techniques apply to simulation of experiments in probability theory and statistics problems, as well as to problems in numerical probability values, and to constructions of probabilistic dependencies etc.

Key words: probability theory, mathematical statistics, information technologies, computer experiments.

Теория вероятностей и математической статистики включена во многие школьные учебники математики и, хотя многие учителя математики пытаются обойти ее стороной, она все же начинает занимать достойное место в учебном процессе.

Значительную помощь в организации процесса обучения теории вероятностей и математической статистике оказывают информационные технологии, и связано это с тем, что компьютер позволяет производить быстрые расчеты, организовывать «виртуальные математические эксперименты» и др.

Мы приведем лишь некоторые примеры использования информационных технологий в обучении указанному учебному материалу.

1) Метод Монте-Карло для прогнозирования результатов экспериментов, для подтверждения или опровержения предложенного ответа [1].

Рассмотрим реализацию метода Монте-Карло на языке программирования Pasca1.

Основными объектами, которые используются в азартных играх, являются монеты, игральные кости, колесо рулетки, карты и т. п. При проведении случайного эксперимента наступает случайный результат. Например, при подбрасывании монеты может выпасть или «герб», или «решка». В результате этого эксперимента может наступить любой из двух исходов, причем с равной вероятностью. Чтобы этот эксперимент реализовать с помощью компьютера, нужно использовать функцию, позволяющую сформировать случайное число в заданном диапазоне.

Выбрать случайное число из диапазона позволяет функция Random. Если эта функция записана без аргумента, то компьютер выбирает случайное действительное число из диапазона [0, 1). Если же в скобках указать аргумент, то компьютер выбирает случайное целое число из диапазона [0, аргумент).

Например, при подбрасывании монеты можно условиться, что исходу «герб» будет соответствовать число 1, а исходу «решка» – число 0. Таким образом, результатом эксперимента будет любое из двух целых чисел из диапазона [0, 2). Значит, команда, реализующая этот эксперимент, записывается следующим образом – RANDOM(2).

Если эксперимент состоит в подбрасывании игральной кости, то исходами могут быть значения от 1 до 6, и команда, реализующая этот эксперимент, записывается следующим образом: RANDOM(6)+1; 1 добавляется для того, чтобы сместиться от диапазона [0, 6) к реальному диапазону значений [1, 7).

Для реализации эксперимента с вращением колеса рулетки (европейской с 37 секторами) необходимо использовать команду: RANDOM(37).

Для осуществления многократного «подбрасывания» и подсчета числа исходов следует организовать цикл с параметром *i*, где *i* – счетчик совершенных подбрасываний.

Запишем программу, реализующую подбрасывание монеты N раз и подсчитывающую количество выпавших «гербов» (G) и «решек» (R).

```
PROGRAM PRIMER1;
VAR I,N,G,R,X:INTEGER;
BEGIN
RANDOMIZE; {инициализация датчика случайных величин}
WRITELN ('ВВЕДИТЕ КОЛИЧЕСТВО ЭКСПЕРИМЕНТОВ');
READLN(N);
G:=0; R:=0;
```

```
FOR I:=1 TO N DO
BEGIN
X:=RANDOM(2); { Эксперимент }
IF X=1  { Обработка }
THEN G:=G+1 { результатов }
ELSE R:=R+1;{ эксперимента }
END;
WRITELN('ЧИСЛО ГЕРБОВ ',G);
WRITELN('ЧИСЛО РЕШЕК ',R);
END.
```

Исполним эту программу по 5 раз для различного количества экспериментов. Результаты выполнения программы могут быть следующие:

Введите количество экспериментов 10

Число «гербов» 7

Число «решек» 3

По результатам моделирования можно определить относительную частоту выпадения «гербов», которая является оценкой вероятности этого события (табл. 1).

Таблица 1

Количество экспериментов	Число «гербов»	Число «решек»	Относительная частота выпадения «гербов» (с 2 знаками после запятой)
10	7	3	0,70
	6	4	0,60
	4	6	0,40
	8	2	0,80
	7	3	0,70
1000	486	514	0,49
	516	484	0,52
	487	513	0,49
	488	512	0,49
	498	502	0,50
10000	5050	4950	0,51
	5021	4979	0,50
	4961	5039	0,50
	4914	5086	0,49
	4973	5027	0,50

Из приведенного примера видно, что, чем больше число проводимых экспериментов, тем частота выпадения гербов ближе к 1/2.

В данной программе весь эксперимент заключался всего лишь в одной строке, реализующей подбрасывание монеты: X:=RANDOM(2).

Команды, стоящие после этой строки, отвечают за обработку результатов эксперимента, в частности, за подсчет числа «гербов» и числа «решек».

Естественно, что для таких простых задач нет смысла писать программу и вычислять вероятность (относительную частоту выпадения «гербов»), используя моделирование, гораздо проще определить эту вероятность аналитически. Для других, более сложных задач, аналитическое вычисление вероятности наступления некоторого события становится трудоемким процессом, и процесс моделирования становится более удобным методом решения.

Задача. Эксперимент состоит в подбрасывании 3 игральных костей. Найти вероятность того, что сумма выпавших очков будет равна 10.

Моделирование методом Монте-Карло.

Составим программу, моделирующую этот эксперимент. В данном случае будет подбрасываться не одна монета, а три игральные кости. Обозначим у – порядковый номер кости. Тогда реализация эксперимента будет выглядеть следующим образом:

```
S:=0;  {сумма очков на костях }
FOR J:=1 TO 3 DO
BEGIN
X:=RANDOM(6)+1; {подбрасываем игральную кость}
S:=S+X;{добавляем очки к общей сумме}
END;
```

Естественно, по условию задачи меняется и обработка результатов эксперимента. Теперь нам нужно подсчитывать число тех экспериментов (В), когда сумма выпавших очков равняется 10.

Таким образом, программа будет иметь следующий вид:

```
PROGRAM PRIMER2;
VAR I,N,B,J,X,S:INTEGER;
BEGIN
RANDOMIZE; {инициализация датчика случайных величин}
WRITELN '( ' ВВЕДИТЕ КОЛИЧЕСТВО ЭКСПЕРИМЕНТОВ');
READLN(N);
B: = 0 ;
FOR I:=1 TO N DO
BEGIN
S : = 0 ;
FOR J:=l TO 3 DO
```

```
BEGIN
X:=RANDOM(6)+l;
S:=S+X;
END;
IF S=10 THEN B:=B+l;
END;
WRITELN('ОТНОСИТЕЛЬНАЯ ЧАСТОТА ВЫПАДЕНИЯ 10 ОЧКОВ',
B/N: 8 : 3 ) ;
END
```

Заметим, что сложнее обстоит дело с моделированием зависимых испытаний.

2) Решение задач по теории вероятностей и математической статистике с помощью среды MathCad.

В наших работах [2, 3] приведено большое число примеров, здесь же мы продемонстрируем лишь некоторые из них.

Если учитель будет использовать эту книгу на элективных курсах для работы с учащимися, то предполагается, что они должны быть знакомы с элементарной теорией вероятностей, когда за основные неопределяемые понятия взяты «испытание», «исходы испытания». Каждое испытание заканчивается только одним из исходов, множество которых (конечное или счетное) называется пространством элементарных событий. С каждым исходом ω_k связывается неотрицательное число p_k – вероятность этого исхода, при этом сумма всех таких вероятностей равна 1. Случайное событие A – это подмножество пространства элементарных событий. Если исход $\omega_k \in A$, то говорят, что он благоприятствует событию A. Его вероятность определяется как сумма $P(A) = \sum_k p_k$,

где суммирование идет по всем k, для которых $\omega_k \in A$. В частном случае, когда множество исходов конечное и все они равновероятные, то есть $p_1 = p_2 = ... = p_n = 1/n$, получаем классическое определение вероятности $P(A) = \frac{m}{n}$, где m – число благоприятных исходов, а n – число всех исходов.

Вопрос о том, как определяются численные значения вероятностей p_k в данной конкретной задаче, решается либо в результате большого числа наблюдений, либо возможно предсказание вероятностей в ходе испытания на основе симметрии, в результате чего приходят к классическому определению. Так, если испытание состоит в подбрасывании игрального кубика, то можно с вероятностью 1/6 ожидать выпадение на каждую из своих граней.

Наличие у события A вероятности p может быть проведено экспериментально, когда подсчитывается относительная частота m/n его появления в достаточно длинной серии n испытаний, приблизительно равная p. В различных работах приведены результаты экспериментов по проверке «симметричности монеты», проведенных рядом исследователей. Последуем вслед за ними и «покидаем» монету на компьютере в качестве упражнения на освоение Mathcad.

Условимся, выпадение герба интерпретировать числом 1, а нулем – выпадение цифры. В достаточно длинной последовательности из случайных нулей и единиц подсчитаем долю единиц, используя встроенную функцию Хевисайда $\Phi(x)$. Для получения случайных чисел 0, 1 сгенерируем случайное число между 0 и 1 командой rnd(1), которое затем округлим в ближайшую сторону командой round(x).

Полученный вектор X из нулей и единиц можно просмотреть прокруткой.

Этот результат подтверждает, что предположение о равновозможности герба и цифры находится в согласии с опытом.

Аналогично экспериментально можно проверить, что с вероятностью 1/6 выпадет шестерка при подбрасывании игрального кубика. Для этого надо уметь сгенерировать случайное число из множества $\{1,2,3,4,5,6\}$. Например, найти целую часть (команда floor) случайного числа rnd(6) между 0 и 6, к которой добавить 1.

Статистические закономерности такого рода были обнаружены давно на примерах карточных игр, игр в кости и т.п., то есть на примерах испытаний, которые характеризуются равновозможностью исходов. Эти наблюдения открыли путь для статистического подхода к численному определению вероятности.

Он особенно важен, когда из теоретических соображений значение вероятности заранее установить нельзя.

По численным значениям элементарных событий, найденным классическим или статистическим способом, могут быть найдены новые вероятности по соответствующим теоремам сложения или умножения. Они достаточно хорошо освещены в учебной и методической литературе, поэтому мы их не анализируем. Но все же приведем пример, решаемый с использованием Mathcad.

Задача. Кавалер де Мере считал, что при подбрасывании трех игральных костей вероятность получить сумму выпавших очков, равную 11, такова же, как и вероятность получения суммы 12 очков. Но его наблюдения показали, что это не так. Для разъяснения противоречия он обратился к Паскалю, который указал ошибку в рассуждениях де Мере.

Обобщим задачу: найдем вероятности получения суммы в r очков, $r = 3,4,...,18$. Кости следует различать, например, занумеровав их. Пусть на первой кости выпало i очков, на второй j и на третьей k очков. Исход испытания зашифруем упорядоченной тройкой этих чисел. Ясно, что тогда пространство элементарных событий будет состоять из 216 точек. Пусть S_r – число троек (i, j, k) с суммой не более r; эту величину найдем с помощью функции Хевисайда Ф(x). Пусть Q_r – число троек с суммой, в точности равной r. Тогда $Q_r = S_r - S_{r-1}$. Искомые вероятности получатся делением Q_r на 216. Приведем соответствующие вычисления в Mathcad.

Как видно, вероятность получения 11 очков больше вероятности получения 12 очков.

3) Рассмотрим обучающую программу «Математика (5-11 классы)», разработанную издательством «Дрофа ДОС» в 2003 году и выпущенную на CD-диске.

«Математика (5-11 классы)» – это набор разнообразных учебных объектов, заданий, моделей, демонстраций, программных модулей и др., предназначенных для поддержки школьного курса математики различными видами практической учебой деятельности. Используемые для этого программные средства (например, модули для проведения вероятностных экспериментов) не только являются инструментами виртуального конструирования объектов разного рода, но и позволяют динамически изменять параметры построенных моделей. Следует отметить, что данная программа в максимальной степени адаптирована для учащихся старшего школьного возраста.

4) Электронный учебник «StatSoft» (http://www.statsoft.ru /home/textbook) помогает начинающим изучать статистику, в первую очередь, старшеклассникам, усвоить основные понятия статистики и более полно представить диапазон применения статистических методов. Дополнительная информация по методам анализа данных, добычи данных, визуализации и прогнозирования содержится на портале StatSoft (http://www.statistics.ru). Материал учебника подготовлен отделом распространения и технической поддержки компании «StatSoft» на основе многолетнего опыта чтения лекций студентам математических специальностей, отдельные его элементы, предварительно адаптированные, могут быть использованы при построении учебного материала в школе. В электронном учебнике приводится довольно большое количество примеров применения математической статистики в различных областях науки и народного хозяйства, включая лабораторные исследования (в медицине, сельском хозяйстве и др. областях).

5) Остановимся на электронном издании «Математика, 5-11 классы. Практикум», разработанном ГУ РЦ ЭМТО, ЗАО «1С», АН О УИЦ «Интерактивная линия» в 2004 г. и выпущенном на CD-диске. Рассмотрим устройство лаборатории «Теория вероятностей и математическая статистика», которая присутствует в программе. Она состоит из пяти частей: 1) методические рекомендации, в которых дается краткое описание работы лаборатории; 2) задачи; 3) лаборатория математической статистики; 4) эксперименты; 5) справочник по теории вероятностей и математической статистике, в котором представлены основные понятия и формулы данных разделов математики.

В разделе «Задачи» учащимся предлагаются задания по следующим темам: классическая формула вычисления вероятностей, геометрические вероятности, условная вероятность, испытания Бернулли, математическая статистика. Решая задачи, ученик мгновенно получает ответ, а по необходимости и подсказку.

В лаборатории математической статистики школьники смогут выполнить серию лабораторных работ, в ходе которых они построят гистограммы, полигоны частот, столбчатые диаграммы, найдут характеристики положения и разброса выборки.

В разделе «Эксперименты» предлагается провести экспериментальные работы следующего содержания – бросание симметричных монет, бросание симметричных кубиков, метод Монте-Карло, доска Гальтона. При выполнении этих работ учащиеся на конкретных прикладных примерах смогут подтвердить многие теоретические положения.

Список сайтов и программ можно продолжить и далее, но мы ограничились данными, поскольку считаем, что они помогут составить основательную базу при изучении элементов теории вероятностей и математической статистики с привлечением адаптированных для старшеклассников электронных средств прикладного назначения.

Список литературы

1. Афанасьев В. В., Суворова М. А. Школьникам о вероятности в играх. Введение в теорию вероятностей для учащихся 8-11 классов. – Ярославль: Академия развития, 2006. – 192 с.

2. Галюкшов Б. С., Далингер В. А., Симонженков С. Д. Элементы теории вероятностей и математической статистики с применением MATHCAD: учебное пособие. Омск: ООО ИПЦ «Сфера», 2009. – 140 с.

3. Далингер В. А. Формирование у бакалавров направления подготовки «Педагогическое образование» профессионально-творческого уровня ИКТ-компетентности // Современные проблемы науки и образования. – 2012. – №2 (Электронный журнал); URL: http://www.science-education.ru/102-5827 (дата обращения: 22.03.2012).

4. Карташев С. Н. Компьютерное моделирование случайных событий // Математика в школе. – 1998. – №4. – С. 86-87.

5. Щербатых С. Информационное обеспечение стохастической линии // Математика. – 2008. – №1. – С. 46-47.

Рецензенты:

Рагулина М. И., доктор педагогических наук, профессор кафедры теории и методики обучения информатике ФГБОУ ВПО «Омский государственный педагогический университет», г. Омск.

Раскина И. И., доктор педагогических наук, профессор, заведующая кафедрой «Прикладная математика» ФГБОУ ВПО «Омский государственный педагогический университет», г. Омск.

Ильмушкин Георгий Максимович, д.п.н., профессор, заведующий кафедрой высшей математики, Димитровградский инженерно-технологический институт – филиал Национального исследовательского ядерного университета МИФИ, г. Димитровград.