УДК 69.04; 539.3/.6

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В БАЛКАХ ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ НА ОСНОВЕ ТЕОРЕМЫ КАСТИЛИАНО

Лоскутов Ю. В. , Гизатуллин Р. Г., Кузнецова Ю. А., Поздеев А. Г.

ФГБОУ ВПО «Поволжский государственный технологический университет», Йошкар-Ола, Россия (424000, г. Йошкар-Ола, пл. Ленина, 3), e-mail: loskutovyv@volgatech.net

Представлена расчетная модель определения перемещений свободного конца консольной балки на основе теоремы Кастилиано. Рассмотрены балки переменного сечения прямоугольного и круглого профилей. Балки изготовлены из изотропного материала. Потенциальная энергия деформации включает плоский поперечный изгиб и растяжение-сжатие. Исследовано влияние угла направления действующей силы и угла наклона поверхности балки на величину прогиба. Отмечено, определение перемещений при помощи теоремы Кастилиано возможно только для точек приложения внешних сил и только в направлении этих сил, что, несомненно, является недостатком данного метода. Настоящее исследование носит методический характер. Оно может быть полезно для изложения темы «Теорема Кастилиано» в курсах «Сопротивление материалов» и «Строительная механика» для строительных специальностей, для практических расчетов в производственных условиях.

Ключевые слова: расчеты на жесткость, балки переменного сечения, напряженное состояние, теорема Кастилиано.

APPLICATION OF CASTIGLIANO'S THEOREM TO STIFFNESS CALCULATIONS OF BEAM WITH VARIABLE CROSS SECTIONS

Loskutov Y. V., Gizatullin R. G., Kuznetsova Y. A., Pozdeev A. G.

Volga State University of Technology, Yoshkar-Ola, Russian Federation (3 Lenin sq., Yoshkar-Ola, Republic of Mari El, Russian Federation, 424000), e-mail: loskutovyv@volgatech.net

In the article is presented the theoretical model for determination of bending deflection of the free end of the cantilever beam. The model is based on the Castigliano's theorem. The beams are considered with the variable rectangular and round cross-sections . The beams are made of an isotropic material. The resilience includes the deformation of the uniplanar cross bending and strain of stretching-compressive. It's researched the effect of the deflection angle of the surface of beam and of the angle of the direction of applied force on the bending deflection. It's noted, the definition of displacement by the Castigliano's theorem is possible only for the points of application of external forces, and only in the direction of the force. It's a limitation of this method. The present analysis is a technical approach. It may be useful to present the subject "Castigliano's theorem" in the course "Mechanics of Materials" and "Structural Mechanics" for the civil engineers or for the practical purposes in a working environment.

Key words: stiffness calculations, beam with variable cross section, mode of deformation, Castigliano's theorem.

Введение

Одним из основных элементов большинства современных строительных и машиностроительных конструкций являются балки, т.е. стержни, работающие на изгиб. На практике нередко встречаются конструкции, включающие балки переменного сечения, для которых один или несколько геометрических размеров поперечного сечения достаточно плавно изменяются по длине. Так, в строительстве как конструктивные элементы различных покрытий применяются деревянные балки с переменным по длине поперечным сечением. При их проектировании могут быть ограничения по максимально возможным перемещениям при возможных архитектурных требованиях по допустимым различиям размеров поперечных сечений на противоположных концах балки. Такие балки исследуются не только на прочность, но и на жесткость. *Целью работы* является разработка методики расчета перемещений консольных балок переменного сечения, оценка влияния параметров нагрузки и геометрии балки на величину прогиба.

Для определения перемещений в поперечных сечениях нагруженной балки существуют различные подходы [1, 2, 4]. В случае, когда необходимо найти перемещение или поворот одного сечения балки, вполне применимы энергетические методы [5]. Так, при расчете балки сложной геометрии, а также при наличии комбинированных профилей можно использовать теорему Кастилиано.

1. Расчетная схема балки переменного сечения. Рассмотрим консольно закрепленную балку, нагруженную на свободном конце силой F под углом α к продольной оси в вертикальной плоскости (рис. 1). Профиль балки может быть прямоугольный или круглый. При

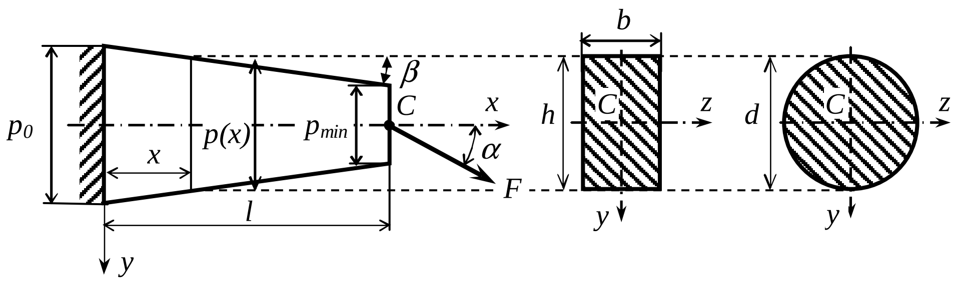

Рис. 1.

этом поперечное сечение балки непостоянно по длине *l:* характерный размер поперечного сечения *p(x)* (ширина *b*, высота *h* или диаметр *d*) изменяется по линейному закону:

$$p(x) = p_0 - 2x \cdot tg\beta\,, \tag{1}$$

где x – продольная координата, отсчитываемая от заделки, p_0 – размер сечения в заделке, β – угол наклона поверхности балки по длине. Материал балки имеет модуль упругости E, модуль сдвига G.

Момент инерции и площадь профиля в произвольном поперечном сечении балок определяются следующим образом:

– для прямоугольного сечения с переменной шириной:

$$I_z(x) = b(x) \cdot h^3/12 = h^3(b_0 - 2x \cdot tg\beta_b)/12\,, \tag{2}$$

$$A(x) = h \cdot b(x) = h(b_0 - 2x \cdot tg\beta_b)\,, \qquad tg\beta_b = (b_0 - b_{\min})/2l\,;$$

– для прямоугольного сечения с переменной высотой:

$$I_z(x) = b \cdot h(x)^3/12 = b(h_0 - 2x \cdot tg\beta_h)^3/12\,, \tag{3}$$

$$A(x) = b \cdot h(x) = b(h_0 - 2x \cdot tg\beta_h)\,, \qquad tg\beta_h = (h_0 - h_{\min})/2l\,;$$

– для круглого сечения с переменным диаметром:

$$I_z(x) = \pi \cdot d(x)^4/64 = \pi(d_0 - 2x \cdot tg\beta_d)^4/64\,, \tag{4}$$

$$A(x)=\pi\cdot d(x)^2/4=\pi(d_0-2x\cdot tg\beta_d)^2/4, \quad tg\beta_d=(d_0-d_{\min})/2l.$$

Составляющие внутренних усилий в произвольном поперечном сечении:

$$N(x)=F\cos\alpha; \;\; Q_y(x)=F\sin\alpha; \;\; M_z(x)=-xF\sin\alpha. \tag{5}$$

2. ***Основные расчетные зависимости.*** Для плоской задачи потенциальная энергия системы будет [1]:

$$U=\int_0^l \frac{N^2(x)}{2EA(x)}dx+\int_0^l \frac{M_z^2(x)}{2EI_z(x)}dx+\int_0^l \frac{k_y Q_y^{\,2}(x)}{2GA(x)}dx, \tag{6}$$

где коэффициент k_y равен $6/5$ для прямоугольного сечения и $10/9$ – для круглого профиля [1].

Подставив в выражение (6) соотношения (2–5) и произведя интегрирование по длине, получим потенциальную энергию деформирования балки. Согласно теореме Кастилиано, если возникающие от действующих сил перемещения в упругой системе малы, то частная производная от потенциальной энергии системы по силе равна перемещению точки приложения силы по направлению этой силы [5], т. е.:

$$\delta_F=\partial U/\partial F. \tag{7}$$

Знак такого перемещения положителен, если его направление совпадает с направлением силы. Теорема применима для тел произвольной формы при всех видах нагружения [5].

Найдя частную производную (7), для исследуемой балки получим перемещение точки приложения силы F по направлению этой силы в виде:

$$\delta_F=\delta_F(N)+\delta_F(M_z)+\delta_F(Q_y). \tag{8}$$

Составляющие формулы (6) в зависимости от формы поперечного сечения имеют вид:

– для прямоугольного сечения с переменной шириной:

$$\delta_F(N)=\frac{F\cos^2\alpha}{2hE\cdot tg\beta_b}\cdot ln|m|, \qquad \delta_F(Q)=\frac{3F\sin^2\alpha}{5hG\cdot tg\beta_b}\cdot ln|m|,$$

$$\delta_F(M)=\frac{3b_0^2F\sin^2\alpha}{2h^3E\cdot tg^3\beta_b}\left(ln|m|-\frac{1}{2m^2}+\frac{2}{m}-\frac{3}{2}\right), \tag{9}$$

где $m=b_0/(b_0-2l\cdot tg\beta_b)=b_0/b_{min}$;

– для прямоугольного сечения с переменной высотой:

$$\delta_F(N)=\frac{F\cos^2\alpha}{2bE\cdot tg\beta_h}\cdot ln|c|, \qquad \delta_F(Q)=\frac{3F\sin^2\alpha}{5bG\cdot tg\beta_h}\cdot ln|c|,$$

$$\delta_F(M)=\frac{3F\sin^2\alpha}{2bE\cdot tg^3\beta_h}\left(ln|c|+\frac{c^2}{2}-2c+\frac{3}{2}\right), \tag{10}$$

где $c=h_0/(h_0-2l\cdot tg\beta_h)=h_0/h_{min}$;

– для круглого сечения с переменным диаметром [3]:

$$\delta_F(N)=\frac{4lF\cos^2\alpha}{\pi E d_0^2}n, \qquad \delta_F(Q)=\frac{40lF\sin^2\alpha}{9\pi G d_0^2}n,$$

$$\delta_F(M)=\frac{8F\sin^2\alpha}{\pi E d_0 tg^3\beta_d}\left(n-n^2+\frac{n^3}{3}-\frac{1}{3}\right), \tag{11}$$

где $n=d_0/(d_0-2l\cdot tg\beta_d)=d_0/d_{min}$.

Вертикальное перемещение левого конца балки:

$$\delta_F{}^B=\delta_F\sin\alpha. \tag{12}$$

3. Анализ упругого деформирования. Оценим влияние угла β наклона поверхности балки (или отношений размеров на концевых сечениях балки) и угла α направления действующей силы F на прогибы свободного конца. Рассмотрим стальные балки со следующими параметрами: l = 1,5 м; $h_0 = b_0 = d_0$= 0,3 м; E = 20800 кН/см^2; G = 8240 кН/см^2. Действующая сила F = 15 кН. Для простоты примем для прямоугольной балки переменного сечения в заделке квадратный профиль, т.е. $b = h$. Минимальные размеры сечений консольной балки на свободном конце выбираем из условий прочности на поперечный изгиб с растяжением.

На рис. 2–4 показаны графики изменения значений прогибов в зависимости от отношений характерных размеров p_{min}/p_0 концевых сечений балок прямоугольных сечений и круглого профиля, построенные по формулам (9–12). Зависимости определены для различных углов наклона силы F: α принимается, равным 30°, 45°,60°,75°и 90°.

Из анализа графиков установлено:

1. При увеличении углов β и α прогибы увеличиваются.

2. У балок, имеющих больший наклон поверхности, при близкой к вертикали силе F вертикальные перемещения свободного конца по значениям достаточно близки друг другу.

Заключение. На основе теоремы Кастилиано представлена расчетная модель определения перемещений консольной балки. Рассмотрены балки переменного сечения прямоугольного и круглого профилей. Исследовано влияние на величину прогиба угла наклона поверхности балки и угла направления действующей на свободном конце силы.

Следует отметить, что определение перемещений при помощи теоремы Кастилиано возможно только для точек приложения внешних сил и только в направлении этих сил, что, несомненно, является недостатком данного метода. Настоящее исследование носит методический характер. Однако оно может быть полезно не только для изложения темы «Теорема

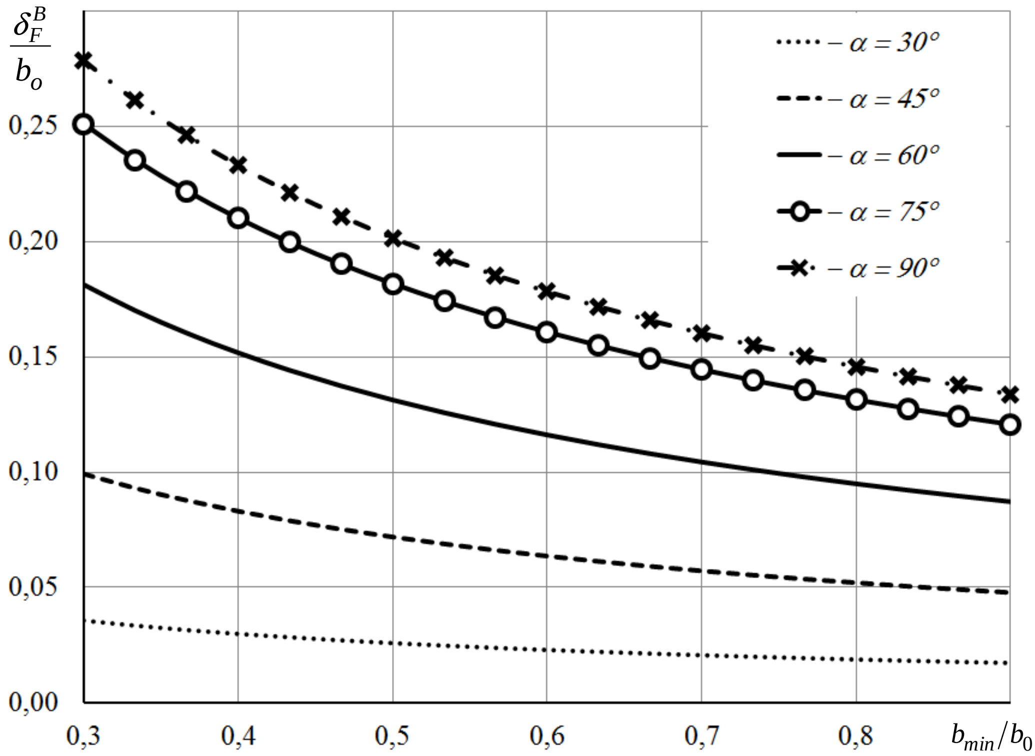

Рис. 2. Прогибы свободного конца балки прямоугольного сечения с переменной шириной

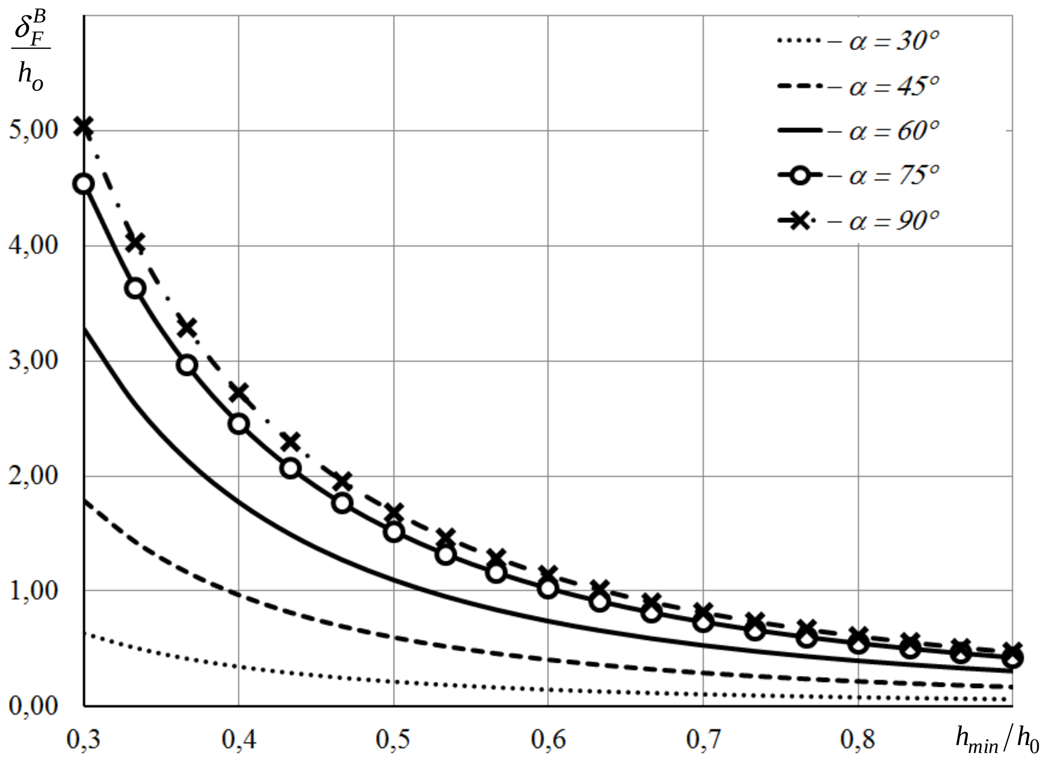

Рис. 3. Прогибы свободного конца балки прямоугольного сечения с переменной высотой

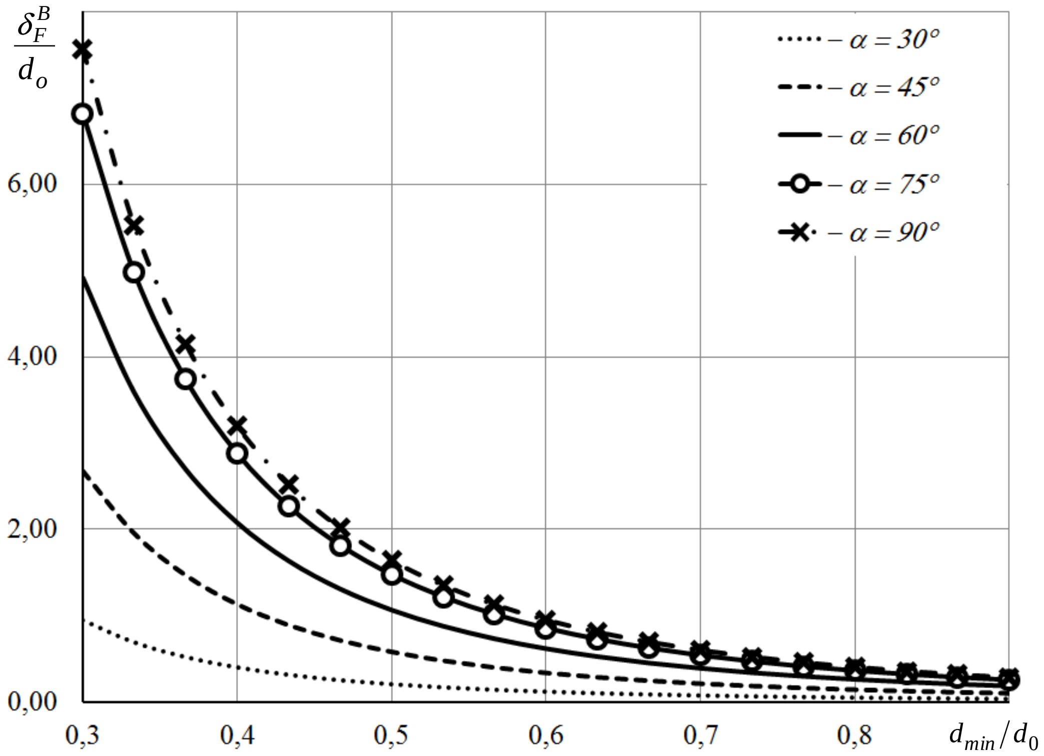

Рис. 4. Прогибы свободного конца балки круглого профиля

Кастилиано» в курсах «Сопротивление материалов» и «Строительная механика» для строительных специальностей, но и для практических расчетов в производственных условиях.

Список литературы

1. Александров А. В., Потапов В. Д., Державин Б. П. Сопротивление материалов. – М.: Высшая школа, 2007. – 560 с.
2. Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности. – М.: Мир, 1987. – 542 с.
3. Лилкова-Маркова С. В., Киндова-Петрова Д. Применение теоремы Кастилиано для балок переменного сечения // Вестник ФГОУ ВПО МГАУ им. В. П. Горячкина. – М., 2008. – № 1. – С. 102-103.
4. Лоскутов Ю. В., Куликов Ю. А. Прочность и жёсткость криволинейных многослойных композитных труб при чистом изгибе // Механика композиционных материалов и конструкций. М.: ИПриМ РАН, 2008. – Т. 14, № 2. – С. 157-166.
5. Феодосьев В. И. Сопротивление материалов. – М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2005. – 523 с.

Результаты получены при выполнении исследований в рамках государственного задания Минобрнауки России на выполнения НИОКР, а также гранта РФФИ № 10-08-97017-р_поволжье_а.

Рецензенты:

Савельев Валерий Владимирович, доктор техн. наук, доцент, профессор кафедры строительного производства, Чебоксарский политехнический институт (филиал) ФГБОУ ВПО «Московского государственного открытого университета им. В. С. Черномырдина», г. Чебоксары.

Иванов Сергей Павлович, доктор техн. наук, профессор, заведующий кафедрой сопротивления материалов и прикладной механики, ФГБОУ ВПО «Поволжский государственный технологический университет», г. Йошкар-Ола.