

УДК 621.822.574

## АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ХАРАКТЕРИСТИК ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ГАЗОВОГО ПОДШИПНИКА

Логинов В. Н., Космынин А. В., Широкова З. В.

*Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет», Комсомольск-на-Амуре, Россия (681013, Комсомольск-на-Амуре, ул. Ленина, 27), e-mail: [vnl\\_55@mail.ru](mailto:vnl_55@mail.ru)*

Рассмотрены области применения газовых подшипников в промышленности. Представлено аналитическое решение задачи определения эксплуатационных характеристик частично пористого цилиндрического газового подшипника при невращающемся вале. Решение базируется на классических в теории газовой смазки допущениях о течении смазочного слоя в зазоре подшипника. В основе лежит решение модифицированного уравнения Рейнольдса и уравнения течения сжатого газа через пористую матрицу. В рамках метода непрерывных линий наддува газа уравнения решаются методом разделения переменных, в котором одна из функций находится в виде степенного ряда. Это позволяет сравнительно просто определить поле давления в зазоре цилиндрического газового подшипника и рассчитать эксплуатационные характеристики – несущую способность и жесткость. Сравнение теоретических результатов расчета с опытными данными характеристик различных частично пористых газовых подшипников показало вполне удовлетворительную точность.

Ключевые слова: пористая среда, газовый подшипник, газовая смазка, несущая способность, жесткость смазочного слоя.

## ANALYTICAL SOLUTION OF THE PROBLEM OF DEFINITION OF CHARACTERISTICS CYLINDRICAL GAS BEARING

Loginov V. N., Kosmyinin A. V., Shyroкова Z. V.

*State educational institutional of higher professional educational «Komsomolsk-na-Amure state technical university», Komsomolsk-on-Amur, Russia (681013, Komsomolsk-on-Amur, Lenin street, 27), e-mail: [vnl\\_55@mail.ru](mailto:vnl_55@mail.ru)*

Scopes of gas bearings in the industry are considered. The analytical solution of a problem of definition of operational characteristics of partially porous cylindrical gas bearing is presented at not rotating shaft. The decision is based on classical in the theory of gas greasing assumptions about a current of a lubricant layer in a bearing gap. In a basis the solution of the modified equation of Reynolds and the equation of a current of the compressed gas through a porous matrix lies. Within a method of continuous lines of pressurization of gas, the equation decide a method of division of variables in which one of functions is in a type of a sedate row. It allows to define rather simply a pressure field in a gap of the cylindrical gas bearing and to calculate operational characteristics – bearing ability and rigidity. Comparison of theoretical results of calculation with skilled data of characteristics of various partially porous gas bearings showed on quite satisfactory accuracy.

Keywords: the porous environment, the gas bearing, the gas greasing, bearing ability, rigidity of a lubricant layer.

Газовые подшипники находят все большее применение в различных технических системах. Так, подшипники на газовой смазке хорошо зарекомендовали себя в станкостроении [1, 4, 5, 7], криогенной и авиа-космической технике, метрологическом оборудовании, гироскопических устройствах, газотурбинных установках, в атомной энергетике и т.д.

К настоящему времени накоплен опыт по разработке методик теоретического расчета характеристик бесконтактных подшипников [6, 8, 10]. В целом он показывает на заметно завышенные (по сравнению с опытными данными) эксплуатационные характеристики опор, полученные на основе применения аналитических методов расчета, и вполне удовлетворительные результаты расчетов на основе использования численных методов [3, 9].

Тем не менее, исходя из соображений простоты проведения параметрических исследований характеристик газовых опор, попытки разработки аналитических методик расчета с достаточной для инженерной практики точностью расчетов продолжают. В этом направлении выполнена и настоящая работа, в которой рассмотрен простой случай работы газовых опор – без вращения вала (работа подшипника в режиме газового подвеса).

Газ из камеры нагнетания под давлением  $P_s$  поступает через пористые вставки в смазочный слой цилиндрического подшипника. Пористые вставки расположены равномерно по окружности в два ряда. Форма пористых вставок цилиндрическая. На вал действует радиальная нагрузка  $F_0$ .

На основании работ [2, 6, 8] принимаются следующие общепринятые допущения относительно течения газа в пористой вставке и смазочном слое подшипника:

- течение газа в пористой среде считается вязким и ламинарным. К такому течению применим закон Дарси, что позволяет считать коэффициент проницаемости пористого материала  $k_p$  постоянным;
- течение смазки в зазоре подшипника изотермическое, а сама смазка сжимаемая;
- радиус вала намного больше толщины смазочного слоя;
- течением в пленке в направлении нормали к стенкам подшипника можно пренебречь и считать давление в этом направлении неизменным;
- массовые и инерционные силы малы по сравнению с силами вязкого трения;
- течение газа в зазоре подшипника стационарное.

Используя эти допущения, получаем уравнения для определения поля давления в зазоре подшипника [2]: в непроницаемой части вкладыша подшипника

$$(H^3 P'_s)'_s + (H^3 P'_z)'_z = 6\mu\omega R(HP)'_s; \quad (1)$$

в пористой среде

$$(\eta_\delta)''_{xx} + (\eta_\delta)''_{yy} + (\eta_\delta)''_{zz} = 0, \quad (2)$$

где:  $H$  – толщина смазочного слоя,  $H = c(1 - \varepsilon \cos \varphi)$ , где  $c$  – средний радиальный зазор,  $\varphi$  – полярный угол, отмеряемый от линии действия нагрузки (сечение с максимальным

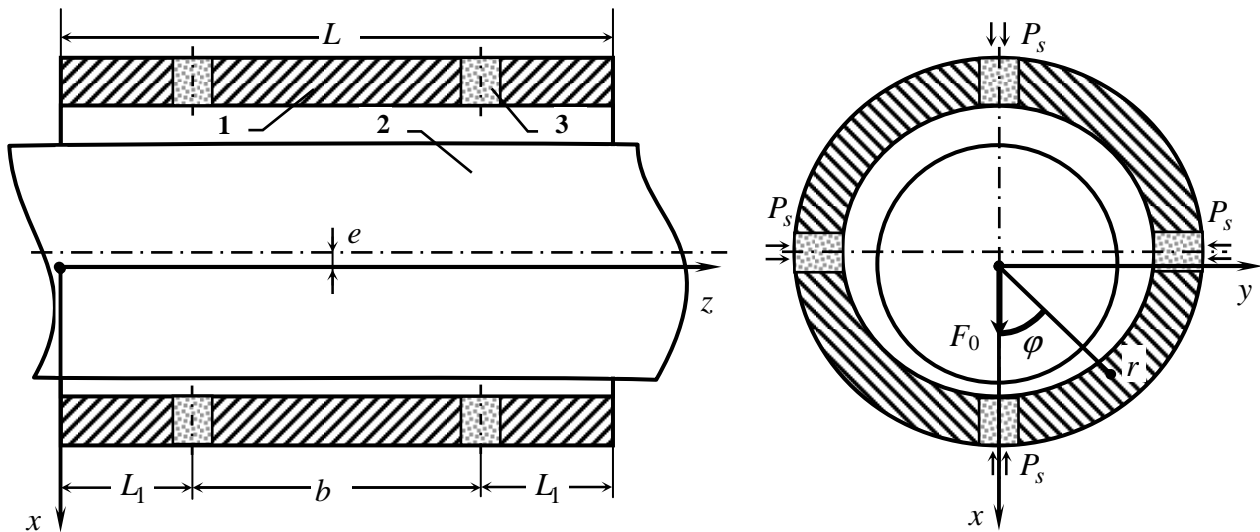


Рис. 1. Газовый статический подшипник с двумя рядами пористых вставок:  
1 – непроницаемая часть вкладыша подшипника; 2 – вал; 3 – пористая вставка

давлением),  $s = \varphi R$  – длина дуги в смазочном слое,  $\varepsilon = e/c$  – относительный эксцентриситет,  $e$  – эксцентриситет,  $R$  – радиус вала,  $P = P(s, z)$  – давление в смазочном слое подшипника,  $\eta_\delta = \eta_\delta(x, y, z) = P_\delta^2$  – квадрат давления в пористой среде (здесь и далее индекс  $\delta$  означает характеристики пористой среды),  $\mu$  – коэффициент вязкости,  $\omega$  – угловая скорость вращения вала (рис.1). Рассмотрим статическую задачу при  $\omega = 0$ .

Ряды пористых вставок, в первом приближении, можно заменить пористыми кольцевыми втулками (пористыми стенками) ширины  $\Delta$  эквивалентными им по площади (метод непрерывных линий наддува), т.е.  $\Delta = nR_0^2/2R$ , где  $n$  – число вставок в ряду,  $R_0$  – радиус вставки. По смыслу поставленной задачи, течение газа в пористой среде происходит только радиальном направлении ( $(P_\delta)'_z = 0$ ), следовательно, в цилиндрической системе координат уравнение (2) принимает вид

$$r^{-1}(r(\eta_\delta)'_r)'_r = 0. \quad (3)$$

Уравнение (1) становится линейным и преобразуется в  $(H^3\eta'_s)'_s + (H^3\eta'_z)'_z = 0$ , где  $\eta = P^2$ , или, если использовать полярный угол – в уравнение

$$(H^3\eta'_\varphi)'_\varphi + R^2(H^3\eta'_z)'_z = 0. \quad (4)$$

Таким образом,  $\eta_\delta = \eta_\delta(\varphi, r)$ ;  $\eta = \eta(\varphi, z)$ .

Граничные условия для уравнения (3) задаются на входе в пористую среду и на входе

в смазочный слой:  $\eta_\delta(\varphi, R_s) = \eta_s = P_s^2$ ;  $\eta_\delta(\varphi, R) = \eta_\Delta(\varphi) = P_\Delta^2(\varphi)$ ,  $z \in [l_1, l_2]$ , где  $R_s = R + \delta$ ,  $l_1 = L_1 - \Delta/2$ ;  $l_2 = L_1 + \Delta/2$ . Граничные условия для уравнения (4) задаются на торцах подшипника и в области пористых вставок:  $\eta(\varphi, 0) = \eta_a$ ;  $\eta(\varphi, z) = \eta_\Delta(\varphi)$ ,  $z \in [l_1, l_2]$ , где  $\eta_a = P_a^2$  ( $P_a$  – атмосферное давление). Неизвестное давление  $P_\Delta(\varphi)$  в граничных условиях определяется как общее решение уравнений (3) и (4). Предполагая  $P_\Delta(\varphi)$  заданным, решим уравнения (3), (4) с поставленными граничными условиями.

Решение уравнения (3) имеет вид ( $\varphi$  фигурирует как параметр)  $\eta_\delta = c_1 \ln r + c_2$ , где функции  $c_1 = c_1(\varphi)$ ,  $c_2 = c_2(\varphi)$  находятся из граничных условий, т.е. являются решением системы уравнений 
$$\begin{cases} \eta_s = c_1 \ln R_s + c_2 \\ \eta_\Delta = c_1 \ln R + c_2 \end{cases}$$
.

Решая эту систему и подставляя найденные функции в выражение для  $\eta_\delta$ , находим  $\eta_\delta = \eta_s - (\eta_s - \eta_\Delta) \ln(r/R_s) / \ln(R/R_s)$  или

$$\eta_\delta = \eta_s + (\eta_s - \eta_\Delta) \ln(r/R_s) / \ln(1 + \delta/R). \quad (5)$$

Так как течение смазки симметрично относительно среднего сечения  $z = L/2$  в дальнейшем изложении рассматриваем половину подшипника. Решим уравнение (4) для непроницаемой части подшипника, расположенной между линией наддува и торцом подшипника (условно назовем эту часть торцевой). Так как вал не вращается, то для получения приближенного решения предположим, что  $\eta'_z$  много больше  $\eta'_\varphi$  и первым слагаемым в уравнении (4) можно пренебречь, тогда получаем  $\eta''_{zz} = 0$ , откуда  $\eta = C_1 z + C_2$ , где функции  $C_1 = C_1(\varphi)$ ,  $C_2 = C_2(\varphi)$  находятся из граничных условий. В результате

$$\eta = \eta_a + (\eta_\Delta - \eta_a) z / l_1. \quad (6)$$

Неизвестный квадрат давления на выходе из пористой вставки  $\eta_\Delta(\varphi)$  находится путем решения уравнения неразрывности, составленного для массового расхода через пористую матрицу с использованием формулы (5) и на выходе из подшипника с использованием формулы (6). В итоге получаем  $\eta_\Delta = \frac{\eta_a + K_0 \eta_s}{1 + K_0}$ , где  $K_0 = \frac{12k_p l_1 \Delta}{H^3 R \ln(1 + \delta/R)}$ . Это грубое решение используется в дальнейшем лишь для определения максимального и минимального давлений в сечении области пористых вставок:  $P_{\max} = P_\Delta(0)$ ,  $P_{\min} = P_\Delta(\pi)$ .

Пусть  $\psi = \eta - \eta_a$ , тогда одно из точных решений уравнения (4) имеет вид  $\psi_0(\varphi, z) = (\alpha_1 I_3(\varphi) + \alpha_2)(\beta_1 z + \beta_2)$ , где первый множитель – решение уравнения  $(h^3 \eta'_\varphi)'_\varphi = 0$ , второй – решение уравнения  $(h^3 \eta'_z)'_z = 0$ ,  $h = H/c$ ,  $h = 1 - \varepsilon \cos \varphi$  – относительная толщина смазочного слоя,

$$I_3(\varphi) = \int_0^\varphi \frac{d\theta}{h^3(\theta)} = \frac{2 + \varepsilon^2}{(1 - \varepsilon^2)^{5/2}} \operatorname{arctg} \left( \sqrt{\frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon}} \operatorname{tg} \left( \frac{\varphi}{2} \right) \right) + \frac{\varepsilon \sin \varphi (4 - 3\varepsilon \cos \varphi - \varepsilon^2)}{2(1 - \varepsilon^2)^2 (1 - \varepsilon \cos \varphi)^2},$$

$\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$  – произвольные постоянные, которые определяются из граничных условий и соблюдения общего характера распределения давления в сечении, тогда первое решение имеет вид:  $\psi_0(\varphi, z) = \psi_{00}(\varphi)z/L_1$ , где  $\psi_{00}(\varphi) = \psi_{\max} - (\psi_{\max} - \psi_{\min})|I_3(\varphi)|/I_3(\pi)$ .

Уравнение (4) эквивалентно уравнению  $\psi''_{\varphi\varphi} + \frac{3\varepsilon \sin \varphi}{1 - \varepsilon \cos \varphi} \psi'_\varphi + R^2 \psi''_{zz} = 0$ .

Второе решение получим, решая это уравнение методом Фурье.

Решение ищем в виде  $\psi = \psi(\varphi, z) = X(\varphi)Z(z)$  ( $\psi(\varphi, 0) \equiv 0$ ). Подставляя эту функцию в уравнение и разделяя переменные, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} R^2 Z'' + \lambda^2 Z = 0 \\ X'' + \frac{3\varepsilon \sin \varphi}{1 - \varepsilon \cos \varphi} X' - \lambda^2 X = 0 \end{cases} \quad (7)$$

В торцевой части подшипника граничные условия для первого уравнения:  $Z(0) = 0$ , и по смыслу поставленной задачи функция  $Z = Z(z)$  должна быть монотонной и в точке  $z = L_1$  достигать максимума, т.е.  $Z'(L_1) = 0$ .

Решение первого уравнения системы (7) есть функция  $Z = A \cos \omega_1 z + B \sin \omega_1 z$ , где  $\omega_1 = \lambda/R$ . Из условия  $Z(0) = 0$  сразу следует, что  $A = 0$ , а из второго условия, что  $\omega_1 = \pi/2L_1$ . Коэффициент  $B$  найдем позже, нормируя решение.

Второе уравнение системы (7) в квадратурах не интегрируется, но нами было замечено, что с помощью замены переменной  $\tau = \cos \varphi$  его можно преобразовать в линейное однородное уравнение относительно  $\tau$ , так как  $X' = -X'_\tau \sin \varphi$ ,  $X'' = X''_{\tau\tau} \sin^2 \varphi - X'_\tau \cos \varphi$  и уравнение принимает вид:  $X''_{\tau\tau} \sin^2 \varphi - X'_\tau \cos \varphi - 3\varepsilon X'_\tau \sin^2 \varphi / (1 - \varepsilon \cos \varphi) - \lambda^2 X = 0$ , или

$$X''_{\tau\tau} (1 - \tau^2) - X'_\tau \tau - 3\varepsilon X'_\tau (1 - \tau^2) / (1 - \varepsilon \tau) - \lambda^2 X = 0,$$

где  $\tau \in [-1, 1]$ .

Умножая обе части на  $1 - \varepsilon \tau$  и приводя подобные слагаемые, получаем уравнение

$$(1 - \varepsilon \tau - \tau^2 + \varepsilon \tau^3) X''_{\tau\tau} - (3\varepsilon + \tau - 4\varepsilon \tau^2) X'_\tau - \lambda^2 (1 - \varepsilon \tau) X = 0. \quad (8)$$

Решение будем искать в виде  $X(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \tau^n$ , подставляя этот ряд в уравнение (8) и

приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях  $\tau$  к нулю, получим рекуррентные формулы для вычисления  $a_n$  в виде:

$$a_2 = \frac{3\varepsilon a_1 + \lambda^2 a_0}{2}, \quad a_{n+1} = \frac{\varepsilon(n^2 + 2n)a_n + ((n-1)^2 + \lambda^2)a_{n-1} - \varepsilon(n^2 - n - 2 + \lambda^2)a_{n-2}}{n(n+1)}, \quad (9)$$

где  $a_0, a_1$  – произвольные параметры.

Таким образом,  $X_1(\tau) \approx \sum_{n=0}^N a_n \tau^n$  (в расчетах  $N = 300$ ), и второе решение имеет вид:

$$\psi_1(\varphi, z) = \psi_{11}(\varphi) \sin(\omega_1 z), \quad \text{где } \psi_{11}(\varphi) = \frac{\psi_{\max}}{X_1(0)} X_1(\varphi) \left( B = \frac{\psi_{\max}}{X_1(0)} \right), \quad \text{в формулах (9) } \lambda = \omega_1 R.$$

В торцевой части подшипника распределение давления принимается равным линейной комбинации этих двух решений с весовыми коэффициентами, пропорциональными средним давлениям в сечении  $z = L_1$

$$\psi_{01}(\varphi, z) = \theta_1 \psi_0(\varphi, z) + (1 - \theta_1) \psi_1(\varphi, z), \quad \text{где } \theta_1 = \frac{q_0}{q_0 + q_1}, \quad q_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi_{00}(\varphi) d\varphi, \quad q_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi_{11}(\varphi) d\varphi.$$

Аналогично, в средней части подшипника – в непроницаемой части подшипника, между линиями наддува.

В качестве первого решения берем распределение давления в области пористых вставок  $\psi_3(\varphi, z') = \psi_{01}(\varphi, L_1)$  ( $\psi_3$  постоянно по переменной  $z' = z - L_1$ , начало отсчета сдвинуто по переменной  $z$  в точку  $z = L_1$ ).

При построении второго решения граничные условия для первого уравнения системы (7):  $Z'(0) = 0, Z'(b/2) = 0$ . Откуда сразу получаем:  $Z(z') = A \cos \omega_2 z'$ , где  $\omega_2 = 2\pi / b$ .

Коэффициенты ряда  $X(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \tau^n$  вычисляются по тем же формулам (9), в которых

теперь  $\lambda = \omega_2 R$ , следовательно,  $X_2(\tau) \approx \sum_{n=0}^N a_n \tau^n$ , и второе решение будет иметь вид:

$$\psi_2(\varphi, z') = \psi_{22}(\varphi) \cos(\omega_2 z'), \quad \text{где } \psi_{22}(\varphi) = \frac{\psi_{\max}}{X_2(0)} X_2(\varphi) \left( A = \frac{\psi_{\max}}{X_2(0)} \right).$$

Распределение давления в средней части подшипника определяется равенством:

$$\psi_{02}(\varphi, z') = \theta_2 \psi_3(\varphi, z') + (1 - \theta_2) \psi_2(\varphi, z'), \quad \text{где } \theta_2 = \frac{q_3}{q_3 + q_2}, \quad q_3 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi_3(\varphi, L_1) d\varphi, \quad q_2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi_{22}(\varphi) d\varphi.$$

При проектировании подшипников наиболее важными интегральными

характеристиками являются:  $Q = R \int_0^L \int_0^{2\pi} P(\varphi, z) \cos \varphi d\varphi dz$  – несущая способность,

$$C_Q = \frac{Q}{2RL(P_s - P_a)} - \text{коэффициент несущей способности, } k_s = (C_Q)'_e - \text{коэффициент}$$

радиальной жесткости смазочного слоя.

С целью проверки адекватности результатов расчетов было проведено сравнение с опытными данными, полученными на экспериментальном стенде ФГБОУ ВПО «КнАГТУ».

На рис. 2 представлены характеристики двухрядного подшипника с цилиндрическими вставками.

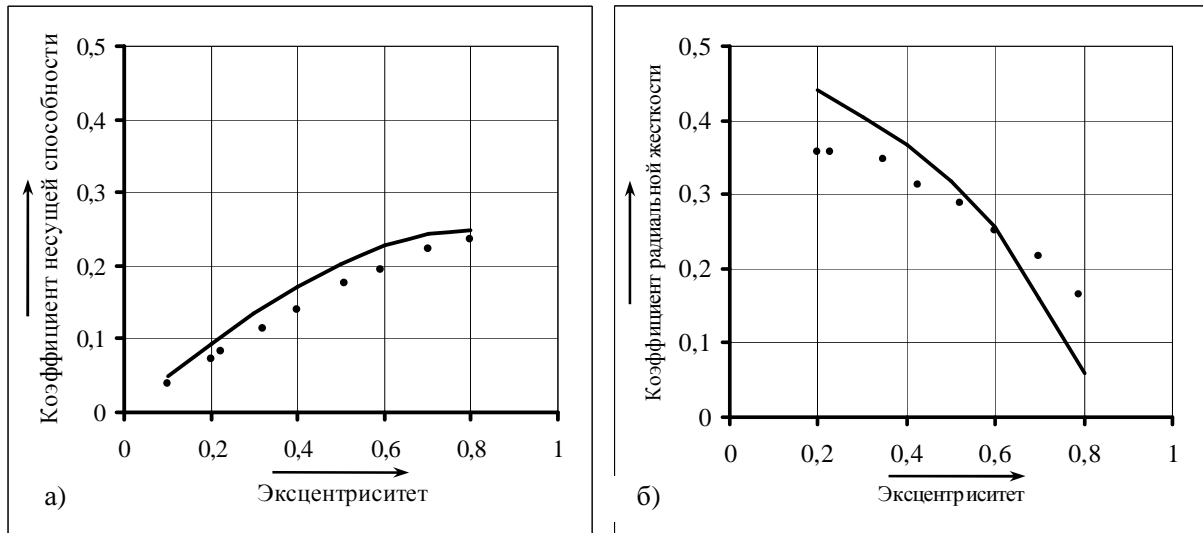


Рис. 2. Зависимости от эксцентриситета коэффициентов:  
а) несущей способности, б) радиальной жесткости

Было также проведено сравнение с экспериментальными данными для подшипников с пористыми шпоночными вставками: с одним рядом и с двумя рядами наддува (рис. 3).

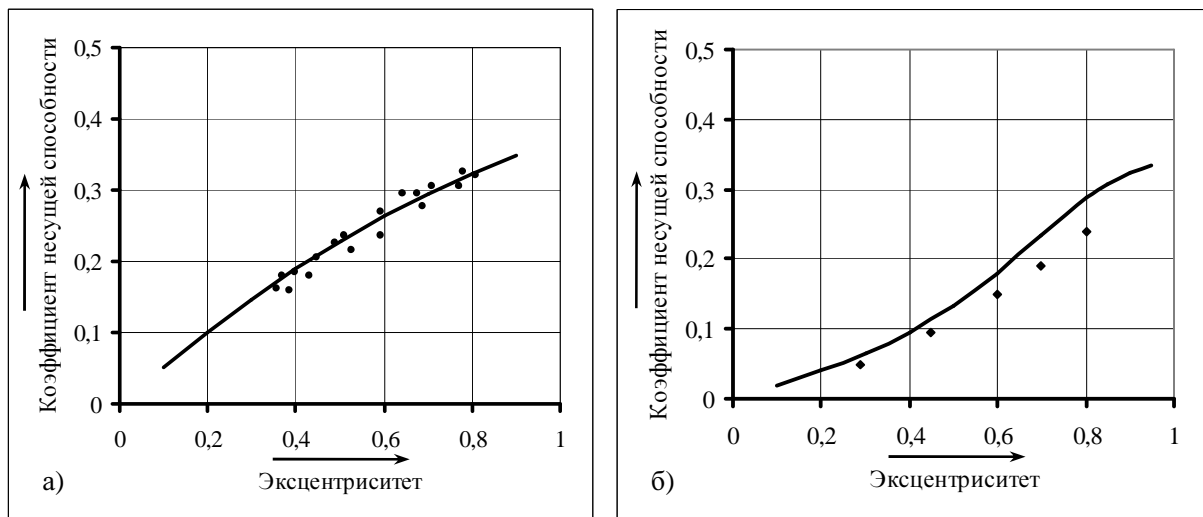


Рис. 3. Зависимости коэффициентов несущей способности от эксцентриситета:  
а) один ряд наддува, б) два ряда наддува

Из представленных графиков видно вполне удовлетворительную согласованность теоретических и опытных данных. Максимальная относительная погрешность при

вычислении  $Q$  не превосходит 10 %.

### Список литературы

1. Высокоскоростной шпиндельный узел внутришлифовального станка для прецизионной обработки деталей летательных аппаратов / А. В. Космынин, В. С. Щетинин, А. С. Хвостиков, А. В. Смирнов, С. С. Блинков // *Фундаментальные исследования*. – 2011. – Ч.1, №8. – С. 137-138.
2. Константиnescу В. Н. Газовая смазка. – М.: Машиностроение, 1968. – 718 с.
3. Космынин А. В., Чернобай С. П., Виноградов С. В. Расчет частично пористых газовых подшипников высокоскоростных шпиндельных узлов // *Автоматизация и современные технологии*. – 2008. – №10. – С. 8-12.
4. Космынин А. В., Чернобай С. П., Шаломов В. И. Прецизионные шпиндельные узлы внутришлифовальных станков для высокоскоростной обработки деталей летательных аппаратов // *Авиационная промышленность*. – 2006. – №3. – С. 40-42.
5. Космынин А. В., Шаломов В. И. Аэростатические шпиндельные опоры с частично пористой стенкой вкладыша // *Современные проблемы науки и образования*. – 2006. – № 2. – С.69-70.
6. Космынин А. В., Щетинин В. С. Расчет несущей способности газоманитных опор высокоскоростных шпиндельных узлов // *СТИН*. – 2010. – № 9. – С. 6-8.
7. Космынин А. В., Щетинин В. С. Эксплуатационные показатели высокоскоростных шпиндельных узлов металлообрабатывающего оборудования с газоманитными опорами // *Успехи современного естествознания*. – 2009. – №11. – С. 69-70.
8. Космынин А. В., Щетинин В. С., Иванова Н. А. Методика расчета несущей способности газоманитного подшипника высокоскоростного шпиндельного узла // *Вестник Самарского ГТУ*. – 2010. – №4. – С. 226-229.
9. О результатах экспериментальной проверки расчётных характеристик высокоскоростных шпиндельных узлов металлорежущих станков с частично пористыми газостатическими опорами / А. В. Космынин, В. И. Шаломов, И. Г. Суходоев, С. В. Виноградов // *Фундаментальные исследования*. – 2009. – №1. – С. 32-33.
10. Щетинин В. С., Космынин А. В. Математическая модель расчета несущей способности высокоскоростного шпиндельного узла на газоманитной опоре // *Трение и смазка в машинах и механизмах*. – 2010. – № 8. – С. 31-35.

**Рецензенты:**



Биленко С. В., д.т.н., доцент, зав. кафедрой «Технология машиностроения» ФГБОУ ВПО «Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет»,  
г. Комсомольск-на-Амуре.

Феоктистов С. И., д.т.н., профессор, зав. кафедрой «Технология самолетостроения» ФГБОУ ВПО «Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет»,  
г. Комсомольск-на-Амуре.