УДК 519.62

ОБ ОЦЕНКЕ ТОЧНОСТИ ДИНАМИЧЕСКОГО АЛГОРИТМА ВОССТАНОВЛЕНИЯ УПРАВЛЕНИЯ НА БЕСКОНЕЧНОМ ВРЕМЕННОМ ПРОМЕЖУТКЕ

Вдовин А.Ю., Рублева С.С.

ФГБОУ ВПО «Уральский государственный лесотехнический университет», Екатеринбург, Россия (*620100, Свердловская область, г. Екатеринбург, Сибирский тракт, д. 37*), *e-mail: rublevas@mail.ru*

Работа выполнена в рамках подхода, предложенного Ю.С. Осиповым и А.В. Кряжимским для построения динамических методов восстановления неизвестного управления в квазилинейной системе, описываемой обыкновенными дифференциальными уравнениями, по неточной информации о ее состояниях. Указанная задача относится к классу некорректных. Первоначально этот подход был ориентирован на восстановление разрывных управлений из пространства L_2 на конечном временном промежутке [*a*, *b*]. Существенным моментом при изучении численного метода является вопрос о точности результата восстановления управления по отношению к величине погрешности измерения фазовых координат системы. В статье указываются дополнительные условия, накладываемые на динамическую систему и степень гладкости управления, позволяющие получить гарантированную оценку точности модифицированного алгоритма на бесконечном временном промежутке в равномерной метрике. Указанная оценка оказывается асимптотически оптимальной по порядку.

Ключевые слова: динамический алгоритм, оценки точности, восстановление управления.

ON ESTIMATION OF THE ACCURACY OF THE ONE DYNAMIC ALGORITHM OF RECONSTRUCTION CONTROL ON INFINITY TIME INTERVAL

Vdovin A.Y., Rubleva S.S.

The Ural State Forest Engineering University, Ekaterinburg, Russia (*620100, Sverdlovsk region, Yekaterinburg, Siberian tract, 37*), *e-mail: rublevas@mail.ru*

The work is performed as part of the approach proposed Y.S. Osipov and A.V. Kryazhimskii for dynamic methods of restoration of unknown control in quasilinear systems described by ordinary differential equations, according to inaccurate information about her condition. The mentioned problem is classified as incorrectly. Initially, this approach was aimed at restoring discontinuous controls in L_2 on a finite time interval [a, b]. The essential point in the study of the numerical method is that of the accuracy of the result to restoration control in relation to the magnitude of the measurement error of the phase coordinates of the system. In article additional conditions are pointed on the dynamic system and the degree of smoothness of the control systems, allowing to receive the guaranteed the accuracy estimation of the modified algorithm on an infinite time interval in the uniform metric. This estimate is asymptotically optimal in order.

Key words: dynamic algorithm, the accuracy estimation, restoration control.

Ю.С. Осиповым и А.В. Кряжимским в [4] предложен динамический подход, позволяющий в режиме реального времени восстанавливать неизвестное управление $u(\cdot)$ в системе вида

$$x'(t) = p(t, x(t)) + f(t, x(t))u(t), \quad x(a) = x_a, \quad t \in [a,b], \tag{1}$$

по неточной информации $\xi(\cdot)$ о движении системы $x(\cdot)$: $|\xi(t_i) - x(t_i)| \le h$ ($|\cdot|$ – евклидова норма, $h > 0$), доступной в узлах $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ временного промежутка $[a,b]$.

Предполагается, что $p(\cdot)$ и $f(\cdot)$ – отображения: $[a,b] \times R^m$ в R^m и в пространство матриц размерности $m \times q$ со спектральной нормой ($\|\cdot\|$), соответственно; при $t \in [a,b]$ значения измеримой функции $u(t)$ принадлежат выпуклому компакту $Q \subset R^q$, каждое значение $x(t)$ является внутренней точкой компакта $X \subset R^m$. Известно, что в общем случае эта задача является некорректной, поскольку множество управлений, порождающих конкретное движение, вообще говоря, неодноэлементно. Упомянутый выше подход основан на идее стабилизации аналога функционала А.Н. Тихонова с помощью процедуры экстремального прицеливания, введенной Н.Н. Красовским в теории позиционных дифференциальных игр, и его специфика состоит в том, что он позволяет восстанавливать нормальное управление $u_*(\cdot)$ – управление, обладающее минимальной нормой в $L_2[a,b]$, среди всех управлений, порождающих наблюдаемое движение, в режиме реального времени.

Формально реализация алгоритма состоит из следующих этапов.

1. До начала работы задается разбиение промежутка $[a,b]$ и выбираются величины: $\Delta = \Delta(h) = \max_i (t_{i+1} - t_i)$, $i \in \overline{0,n}$ (далее для простоты полагаем $\Delta = [(b-a)/n]$), $\alpha = \alpha(h)$, $w_h(a) = \xi(a)$, и значение u_0, полагается равным проекции нуля на компакт Q.

2. На каждом шаге $[t_i, t_{i+1}]$ вычисляется:

а) состояние $w_h(t_{i+1})$ системы модели, функционирующей по правилу

$$w_h(t) = w_h(t_i) + \left(p(t_i, \xi(t_i)) + f(t_i, \xi(t_i)) u_i \right)(t - t_i);$$

б) значение u_i – результат проекции на Q вектора $f^T(t_i, \xi(t_i))(\xi(t_i) - w_h(t_i))/\alpha$.

Таким образом, формируется приближение $u_*(\cdot)$ в виде кусочно-постоянной функции $u_h(t) = u_i$ при $t \in [t_i, t_{i+1})$. Описанный выше алгоритм D_h получил название метода динамической регуляризации. В цитируемой работе доказано следующее.

Утверждение 1. Пусть $p(\cdot)$, $f(\cdot)$ удовлетворяют условию Липшица по совокупности переменных с общей константой L; h, Δ, α согласуются так, что величина $(\alpha^2 + h + \Delta)/\alpha$ стремится к нулю вместе с h. Тогда D_h является $L_2[a,b]$ нормально регуляризирующим, то есть $\lim_{h\to 0} \|u_*(\cdot) - u_h(\cdot)\|_{L_2[a,b]} = 0$.

Введем вспомогательные понятия.

Определение 1. Функция $v_1(h)(v_2(h))$ называется нижней (верхней) оценкой точности алгоритма в функциональном пространстве F, если существует $h_* > 0$ такое, что для всех $h \in (0, h_*)$ имеет место неравенство $v_1(h) \le \|u_*(\cdot) - u_h(\cdot)\|_F \le v_2(h)$.

Определение 2. Функцию $\gamma(\cdot)$ назовем порядком точности при уровне погрешности h, если существуют $C_i, > 0$ $i = 1,2$ такие, что $v_i(h) = C_i h^{\gamma(h)}$, а число $r = \lim_{h\to +0} \gamma(h)$ – асимптотическим порядком точности.

В работе [3] получены верхние и нижние оценки точности $D_h^{(1)}$ – модификации исходного алгоритма D_h, позволяющей отказаться от трудоемкой процедуры проектирования на компакт при построении $u_h(\cdot)$, в метрике пространства $L_1[a,b]$.

Утверждение 2. Пусть: 1) ранг матрицы $f(t)$ постоянен, вариация $u_*(t)$ ограничена при $t \in [a,b]$; 2) значения $u_*(t)$ являются внутренними точками соответствующего компакта Q; 3) компакт Q содержит 0; 4) существует $h_{**} > 0$ такое, что для всех $h \in (0, h_{**})$ величины h/α^2, Δ/α^2 ограничены. Тогда при выборе параметров $\alpha = h^{\frac{k-1}{2k+1}}$, $\Delta = h$ асимптотический порядок точности $D_h^{(1)}$ в пространстве $L_1[a,b]$ равен ½.

Возможность получения асимптотического порядка точности в равномерной метрике ($\max\limits_{t\in[a,b]} |u_*(t) - u_h(t)|$) для $D_h^{(1)}$ рассматривалась в [5].

Утверждение 3. Пусть: 1) выполнены условия утверждения 2; 2) $u(t)$ удовлетворяет условию Липшица на $[a,b]$; 3) известно $u_\sigma(a)$ такое, что $|u(a) - u_\sigma(a)| \le \sigma$, $\sigma = \sigma(h) > 0$. Тогда при выборе параметров $\alpha = h^{\frac{k-1}{2k+1}}$, $\Delta = h$, $\sigma = \alpha$ асимптотический порядок точности в равномерной метрике равен ½, то есть порядок точности данного алгоритма является асимптотически оптимальным.

Поскольку известно, что нижняя оценка точности $D_h^{(1)}$ в равномерной метрике удовлетворяет условию $v_1(h) \ge C\sqrt{h}$, то цель работы состоит в получении верхней оценки точности $D_h^{(1)}$ в равномерной метрике на промежутке $[a, \infty)$. Пусть задано точное начальное условие $u(a)$, тогда согласно подходу, предложенному в [5], система (1) при выборе $v(t) = u(t) - u(a)$, $g(t, x(t)) = p(t, x(t)) + f(t, x(t))u(a)$ может быть приведена к виду

$$x'(t) = g(t, x(t)) + f(t, x(t))v(t), \quad x(a) = x_a, \ t \in [a,b]. \tag{2}$$

Выполнение условий утверждения 3 гарантирует существование положительных констант M_f, M_g, M_v таких, что $\|f(\cdot)\| \le M_f$, $|g(\cdot)| \le M_g$, $|v(\cdot)| \le M_v$. Через L_v обозначим константу Липшица нормального управления $v_*(\cdot)$. При отказе от проектирования на компакт, постоянное приближение $v_h(t) = v_i$ управления $v_*(t)$ на каждом шаге $t \in [t_i, t_{i+1})$ определяется следующим образом: $v_i = f^T(t_i, \xi(t_i))(\xi(t_i) - w_h(t_i))/\alpha.$

Зафиксируем α. Управление $v_0(t) = f^T(t, x(t))(x(t) - w_0(t))/\alpha$ и систему – модель

$$w_0'(t) = g(t, x(t)) + A(t, x(t))(x(t) - w_0(t))/\alpha, \quad w_0(a) = x_a, \tag{3}$$

где $A(t,x(t)) = f(t,x(t))\, f^T(t,x(t))$ назовем виртуальными. Для получения асимптотического порядка точности $D_h^{(1)}$ оценим сначала $|v_0(t) - v_*(t)|$, а затем норму разности $|v_0(\cdot) - v_h(\cdot)|$. Если предположить невырожденность матрицы коэффициентов при управлении $f(\cdot)$ вдоль наблюдаемой траектории, то подход, предложенный в [2] для получения оценки первой из указанных норм, может быть использован и в случае бесконечного временного промежутка:

решение задачи Коши (3) представим в виде

$$w_0(t) = K(t,a;A(\cdot))x_a + \int_a^t K(t,\tau;A(\cdot))\big(g(\tau,x(\tau)) + (1/\alpha)\, A(\tau,x(\tau))\, x(\tau)\big)d\tau, \tag{4}$$

где $K(t,\tau;A(\cdot))$ – решение дифференциального уравнения

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\big(K(t,\tau;A(\cdot))\big) = \frac{1}{\alpha} K(t,\tau;A(\cdot))A(\tau,x(\tau))\,d\tau \tag{5}$$

с начальным условием $K(t,t;A(\cdot)) = E$ (E – единичная матрица). Интегрирование по частям от a до t второго слагаемого из правой части (4), с учетом (2) и (5), приводит к равенству

$$\big(x(t) - w_0(t)\big)/\alpha = (1/\alpha)\int_a^t K(t,\tau;A(\cdot))\, f(\tau,x(\tau))v(\tau)\,d\tau.$$

В силу свойств обратной матрицы, с учетом дифференциального уравнения (5), имеем:

$$\big(x(t) - w_0(t)\big)/\alpha = (1/\alpha)\int_a^t \frac{\partial}{\partial\tau}\big(K(t,\tau;A(\cdot))\big)\big(f^T(\tau,x(\tau))\big)^{-1} v(\tau)\,d\tau. \tag{6}$$

Обозначим $F(\cdot) = \big(f^T(\cdot,x(\cdot))\big)^{-1} v(\cdot)$. Введем понятие оператора восстановления значения $F(t)$. Пусть $h \in (0,\infty)$, $\Phi_h(\cdot) : [a,b]\times[a,b] \to R^{m\times m}$, $\varphi(\cdot) : [a,b] \to R^m$ и $\Phi_h(t,t)\varphi(t) = \varphi(t)$.

Рассмотрим представление $\int_a^t \Phi_h(t,s)\varphi(s)ds = \varphi(t) + \varepsilon(h)$. Интегральный оператор в левой части последнего равенства назовем оператором восстановления значения $\varphi(t)$, $\varepsilon(h)$ – погрешностью, а $\Phi_h(t,s)$ его ядром.

Утверждение 4. [3] Пусть выполнены условия утверждения 3. Тогда существует $h_1>0$ такое, что для всех $t \in [a,\infty)$, $\tau \in [a,t]$, $h \in (0,h_1]$ имеет место оценка $\left\|K(t,\tau;A(\cdot))\right\| \le \sqrt{m}e^{-\frac{\lambda}{\alpha}(t-\tau)}$, где $\lambda > 0$ точная нижняя грань на $[a,b]$ минимального собственного числа $\lambda(t)$ матрицы $A(t,x(t))$.

Несложно убедиться в результатах лемм 1, 2.

Лемма 1. Если матрица $H(\cdot):[a,b]\to R^{m\times m}$, отображение $p(\cdot):[a,b]\to R^{m}$ удовлетворяет условию Липшица с константой L_p и для всех $t\in[a,b]$ справедливы оценки $\|H(t)\|\le M_H$, $\left\|\int_a^t H(\tau)d\tau\right\|\le\varepsilon$, то $\left|\int_a^t H(\tau)\left(p(\tau)-p(t)\right)d\tau\right|\le\varepsilon L_p\,(b-a)$.

Лемма 2. Пусть выполнены условия утверждения 3, матрица $f(t,x(t))$ обратима на промежутке $[a,t]$. Тогда $F(t)$ удовлетворяет условию Липшица с константой L_F, равной $L_F=\left(\left(\sqrt{\lambda}\right)^{-1}L_v+(2\lambda)^{-1}L\left(1+M_g+M_fM_v\right)\right)$.

Лемма 3. Пусть выполнены условия утверждения 3; $\delta=\delta(h)$, α/δ стремятся к нулю вместе с h, $v(t)\equiv 0$ при $t\in[a-\delta,a)$, и $k\in$. Тогда существуют $h_2(k),K_1,K_2>0$ такие, что для всех $h\in(0,h_2(k)]$ погрешность оператора восстановления значения $F(t)$ удовлетворяет оценке: $\varepsilon(h)\le K_1\delta+K_2\left(\alpha/(\lambda\delta)\right)^k$, где K_1,K_2 выписываются конструктивно.

Доказательство. Пусть $K(t,\tau;A(\cdot))\equiv K(t,a;A(\cdot))$ при $\tau\in[a-\delta,a)$, определим

$$I_1=\left|\int_{a-\delta}^{t-\delta}\frac{\partial}{\partial\tau}(K(t,\tau;A(\cdot)))\left(F(\tau)-F(t)\right)d\tau\right|,\ I_2=\left|\int_{t-\delta}^{t}\frac{\partial}{\partial\tau}(K(t,\tau;A(\cdot)))\left(F(\tau)-F(t)\right)d\tau\right|,$$

$I_3=\left|\int_{a-\delta}^{t}\frac{\partial}{\partial\tau}(K(t,\tau;A(\cdot)))F(t)\,d\tau-F(t)\right|$. Оценим каждую из указанных величин. В силу утверждения 4, дифференциального уравнения (5) для I_1 справедливо:

$$I_1\le(1/\alpha)\int_{a-\delta}^{t-\delta}\|K(t,\tau;A(\cdot))\|\,\|A(\tau,x(\tau))\|\,|F(\tau)-F(t)|\,d\tau\le 2\left(\sqrt{\lambda^3}\right)^{-1}M_f^2M_v\sqrt{m}e^{-\frac{\lambda\delta}{\alpha}}.$$

Для получения оценки I_2 воспользуемся результатами лемм 1, 2:

$$I_2\le L_F\delta\int_{t-\delta}^{t}\left\|\frac{\partial}{\partial\tau}(K(t,\tau;A(\cdot)))\right\|d\tau\le L_F\delta\|E-K(t,t-\delta;A(\cdot))\|\le L_F\delta\left(1+\sqrt{m}\right).$$

Для I_3, с учетом начального условия: $I_3\le\left|\left(K(t,\tau;A(\cdot))\Big|_{a-\delta}^{t}-E\right)F(t)\right|\le\sqrt{m(\lambda)^{-1}}M_ve^{-\lambda\frac{\delta}{\alpha}}$.

Тогда $\varepsilon(h)=\left|\int_a^t\frac{\partial}{\partial\tau}(K(t,\tau;A(\cdot)))F(\tau)\,d\tau-F(t)\right|\le I_1+I_2+I_3\le K_1\delta+K_2e^{-\lambda\frac{\delta}{\alpha}}$,

где $K_1=L_F\left(1+\sqrt{m}\right)$, $K_2=2M_vM_f^2\sqrt{\lambda^{-3}}\sqrt{m}+\sqrt{m\lambda^{-1}}M_v$. Заметим, что для любого $k\in$ можно указать $h_2(k)>0$ такое, что для всех $h\in(0,h_2(k)]$ справедливо $e^{-\lambda\frac{\delta}{\alpha}}\le\left(\alpha/(\lambda\delta)\right)^k$, из которого следует требуемый результат.

Следствие. В силу (6), ограниченности $F(t)$ и утверждения 4 существует $K_0 > 0$ такая, что для всех $t \in [a, \infty)$ имеет место неравенство $\left|\left(x(t) - w_0(t)\right) / \alpha\right| \le K_0$.

Лемма 4. Пусть выполнены условия леммы 3. Тогда существуют $K_3 = M_f K_1$, $K_4 = M_f K_2$ такие, что для всех $t \in [a, \infty)$ справедлива оценка $\left|v_0(t) - v(t)\right| \le K_3\delta + K_4\left(\alpha / (\lambda\delta)\right)^k$.

Доказательство. В силу леммы 3 и равенства (6): $\left|F(t) - \dfrac{x(t) - w_0(t)}{\alpha}\right| \le K_1\delta + K_2\left(\alpha / (\lambda\delta)\right)^k$,

из этого следует существование $e_1(t)$, $t \in [a, \infty)$ по норме меньшего единицы такого, что

$$\left(f^T(t, x(t))\right)^{-1} v(t) - \left(x(t) - w_0(t)\right) / \alpha = \left(K_1\delta + K_2\left(\alpha / (\lambda\delta)\right)^k\right) e_1(t).$$

Разрешая последнее уравнение относительно $v(\cdot)$, получаем:

$$v(t) = f^T(t, x(t))\left(x(t) - w_0(t)\right) / \alpha + f^T(t, x(t))\left(K_1\delta + K_2\left(\alpha / (\lambda\delta)\right)^k\right) e_1(t),$$

поэтому $\left|v(t) - v_0(t)\right| \le M_f K_1\delta + M_f K_2\left(\alpha / (\lambda\delta)\right)^k$, последнее влечет справедливость леммы.

Далее займемся оценкой нормы разности $v_0(\cdot)$ и $v_h(\cdot)$. Заметим, что при $t \in [t_i, t_{i+1})$,

$$w_h(a) = \xi(a),\ w_h(t) = w_h(t_i) + \left(g(t_i, \xi(t_i)) + A(t_i, \xi(t_i))\left(\xi(t_i) - w_h(t_i)\right) / \alpha\right)(t - t_i),$$

является реализацией метода Эйлера для уравнения (3) с неточно заданной правой частью.

Отметим, что $v_0(t) - v_h(t) = f^T(t, x(t))\left(x(t) - \xi(t_i)\right) / \alpha + f^T(t, x(t))\left(w_h(t_i) - w_h(t)\right) / \alpha +$

$$+ f^T(t, x(t))\left(w_h(t) - w_0(t)\right) / \alpha + \left(f^T(t, x(t)) - f^T(t_i, \xi(t_i))\right)\left(\xi(t_i) - w_h(t_i)\right) / \alpha \qquad (7)$$

Теперь, для получения окончательного результата требуется оценить $\left|w_h(t) - w_0(t)\right|$ и $\left|\xi(t_i) - w_h(t_i)\right|$. Введем вспомогательную систему, которую можно трактовать как метод Эйлера, для решения дифференциального уравнения (3) с точно известной правой частью:

$$w_e(t) = w_e(t_i) + \left(g(t_i, x(t_i)) + A(t_i, x(t_i))\left(x(t_i) - w_e(t_i)\right) / \alpha\right)(t - t_i), \qquad (8)$$

при $t \in [t_i, t_{i+1})$ и $w_e(a) = w_0(a)$.

Лемма 5. Пусть выполнены условия леммы 3, тогда существуют h_3, $K_5 > 0$ такие, что всех $h \in (0, h_3]$ и $t \in [a, \infty)$ имеет место неравенство: $\left|w_0(t) - w_e(t)\right| \le K_5\Delta$.

Доказательство. В силу (3) и (8) $w_0(t_{i+1}) - w_e(t_{i+1}) = (E - A(t_i, x(t_i))\dfrac{\Delta}{\alpha})\left(w_0(t_i) - w_e(t_i)\right) +$

$$+\int_{t_i}^{t_{i+1}} A(t_i, x(t_i))\left(x(t) - x(t_i)\right) / \alpha dt - \int_{t_i}^{t_{i+1}} A(t_i, x(t_i))\left(w_0(t) - w_0(t_i)\right) / \alpha dt +$$

$$+\int_{t_i}^{t_{i+1}} \left(A(t, x(t)) - A(t_i, x(t_i))\right)\left(x(t) - w_0(t)\right) / \alpha dt + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left(g(t, x(t)) - g(t_i, x(t_i))\right) dt.$$

Из последнего следует оценка сверху для нормы разности $w_0(t_{i+1})$ и $w_e(t_{i+1})$:

$$|w_0(t_{i+1})-w_e(t_{i+1})|\le\|E-\Delta/\alpha A(t_i,x(t_i))\|\,|w_0(t_i)-w_e(t_i)|+M_f^2\left(M_g+M_fM_v\right)\Delta^2/\alpha+$$
$$+M_f^2\left(M_g+M_f^2K_0\right)\Delta^2/\alpha+K_0\Delta^2 2LM_f\left(1+M_g+M_fM_v\right)+L\left(1+M_g+M_fM_v\right)\Delta^2. \qquad (9)$$

Рассмотрим $\|E-\Delta/\alpha A(t_i,x(t_i))\|$. Согласно [1] для симметричной матрицы $A(\cdot,x(\cdot))$ имеет место представление $A(\cdot,x(\cdot))=T(\cdot,x(\cdot))\Lambda(\cdot)T^{-1}(\cdot,x(\cdot))$, где $\Lambda(\cdot)=diag\left(\lambda_1(\cdot),\ldots,\lambda_m(\cdot)\right)$ - диагональная матрица с элементами $\lambda_1(\cdot),\ldots,\lambda_m(\cdot)$. Поэтому существует $h_3>0$ такое, что всех $h\in\left(0,h_3\right]$ тогда $\|E-\frac{\Delta}{\alpha}A(t_i,x(t_i))\|=\|T(t_i,x(t_i))T^{-1}(t_i,x(t_i))-\frac{\Delta}{\alpha}T(t_i,x(t_i))\Lambda(t_i)T^{-1}(t_i,x(t_i))\|=$

$$=\left\|T(t_i,x(t_i))diag\left(1-\left(\Delta/\alpha\right)\lambda_1(t_i),\ldots,1-\left(\Delta/\alpha\right)\lambda_m(t_i)\right)T^{-1}(t_i,x(t_i))\right\|\le\left(\alpha-\Delta\lambda\right)/\alpha.$$

В силу полученной оценки неравенство (9) при $C_1=M_f^2\left(2M_g+M_fM_v+M_f^2K_0\right)$, $C_2=\left(1+M_g+M_fM_v\right)\left(2K_0M_f+1\right)L$ принимает вид:

$$|w_0(t_{i+1})-w_e(t_{i+1})|\le\left(\alpha-\Delta\lambda\right)/\alpha\,|w_0(t_i)-w_e(t_i)|+\Delta^2/\alpha C_1+\Delta^2C_2,$$

из которого, с учетом начальных условий для $w_0(\cdot)$ и $w_e(\cdot)$, по индукции получаем

$$|w_0(t_n)-w_e(t_n)|\le\sum_{i=0}^{n-1}\left(\left(\alpha-\Delta\lambda\right)/\alpha\right)^i\left(\Delta^2/\alpha C_1+\Delta^2C_2\right)\le\left(1-\left(\alpha-\Delta\lambda\right)/\alpha\right)^{-1}\left(\Delta^2/\alpha C_1+\Delta^2C_2\right)\le$$

$\le\Delta\left(C_1/\lambda+2C_2/\lambda\right)$, полагая $K_5=C_1/\lambda+2C_2/\lambda$, приходим к требуемой оценке.

Рассуждения, аналогичные приведенным в лемме 5, с учетом полученного в ней результата, позволяют сформулировать:

Лемма 6. Пусть выполнены условия леммы 3, тогда существуют h_4, K_6, $K_7>0$ такие, что всех $h\in\left(0,h_4\right]$ и $t\in\left[a,\infty\right)$ справедливо неравенство: $|w_h(t)-w_e(t)|\le hK_6+\alpha\sigma K_7$,

где $K_6=\left(M_f^2+2LM_fK_0+2LM_fK_5+L(1+M_v)\right)/\lambda+1$, $K_7=M_f/\lambda$.

Из лемм 5, 6 непосредственно следует:

Лемма 7. Пусть выполнены условия леммы 3. Тогда для всех $t\in\left[a,\infty\right)$

$$|w_h(t)-w_0(t)|\le\Delta K_5+hK_6+\alpha\sigma K_7.$$

Следствие 1. Из ограниченности $w_0(t)$ и леммы 7 следует ограниченность $w_h(t)$ на $\left[a,\infty\right)$, при этом существует $K_8>0$ такая, что для всех $i=\overline{0,n}$ имеет место: $|w_h(t_i)-\xi(t_i)|\le K_8$.

Лемма 8. Пусть выполнены условия леммы 3. Тогда существуют K_9, K_{10}, $K_{11}>0$ такие, что всех $t\in\left[a,\infty\right)$ имеет место неравенство $|v_0(t)-v_h(t)|\le h/\alpha K_9+\Delta/\alpha K_{10}+\sigma K_{11}$.

Доказательство. На основании (7) имеем: $|v_0(t)-v_h(t)| \le \| f^T(t,x(t))\| |x(t)-\xi(t_i)| / \alpha +$

$$+\| f^T(t,x(t))\| \left(|g(t_i,\xi(t_i))| + \|A(t_i,\xi(t_i))\| |\xi(t_i)-w_h(t_i)| / \alpha \right) (\Delta/\alpha) +$$
$$+\| f^T(t,x(t))\| |w_h(t)-w_0(t)| / \alpha + \| f^T(t,x(t)) - f^T(t_i,\xi(t_i))\| |\xi(t_i)-w_h(t_i)| / \alpha.$$

Тогда с учетом следствия 1 из леммы 3, леммы 7, при выборе

$K_9 = M_f(1+K_6)(1+M_f^2) + LK_8$ $K_{10} = (M_f + LK_8)(M_g + M_f M_v) + M_f(M_g + K_5) + M_f^3(K_0 + K_5) + LK_8$

$K_{11} = 2M_f K_7$,приходим к требуемому результату. Лемма доказана.

На основании лемм 4, 8 справедлива

Теорема (верхняя оценка точности). Пусть выполнены условия леммы 3, $\delta_1 = \lambda\delta$, тогда верхняя оценка точности $D_h^{(1)}$ в равномерной метрике на $[a,\infty)$ имеет вид

$$v_2(h) \le (K_3/\lambda)\delta_1 + K_4(\alpha/\delta_1)^k + h/\alpha K_9 + \Delta/\alpha K_{10} + \sigma K_{11}.$$

Замечание 1. Оптимизация асимптотического порядка верхней оценки точности $D_h^{(1)}$ реализуется выбором $\delta_1 = \alpha^{\frac{k}{k+1}}$, $\alpha = h^{\frac{k-1}{2k+1}}$, $\sigma = \alpha, \Delta = h$ при этом $\gamma_0 = 1/2$.

Замечание 2. Приближение искомого неизвестного управления $u(\cdot)$ из системы (1) будет иметь вид $u_h(\cdot) = v_h(\cdot) + v_\sigma(a)$.

Список литературы

1. Алберт А. Регрессия, псевдоинверсия и рекуррентное оценивание. – М. : Наука, 1977. – 224 с.

2. Вдовин А.Ю., Рублева С.С. О гарантированной оценке точности динамического восстановления управления (случай непостоянства ранга матрицы) // Труды Воронежской зимней математической школы С.Г. Крейна – 2008. – Воронеж : ВорГУ. – 2008. – С. 54–68.

3. Вдовин А.Ю., Рублева С.С. О гарантированной точности процедуры динамического восстановления управления с ограниченной вариацией в системе, зависящей от него линейно // Математические заметки. – 2010. – Т. 87. – Вып. 3. – С. 337-358.

4. Osipov Y.S., Kryazhimskii A.V. Inverse problems for ordinary differential equations: dynamical solutions. – London : Gordon and Breach, 1995. – 625 p.

5. Vdovin A.Y., Rubleva S.S. On stable reconstruction of the impact in the system of ordinary differential equation // Scientific Research. Applied Mathematics. ISSN 2152-7385 (Print). – 2010. – Vol. 1. – No 2. – P. 118-124. ISSN 2152-7393 (Online). – URL: http://www.scirp.org/journal/am. (дата обращения: 8.10.12).

Рецензенты

Короткий А.И, д. физ.-мат. н., профессор, зав. отделом ИММ УрОРАН, г. Екатеринбург,

Ким А.В., д. физ.-мат. н., профессор, руководитель группы ИММ УрОРАН, г. Екатеринбург.
Бичурин Мирза Имамович, д.ф.м.н., профессор, заведующий кафедрой проектирования и технологии радиоаппаратуры, Новгородский государственный университет, г. Великий Новгород.