УДК 517.946

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯ В-ПОЛИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Денисова М.Ю.

ФГАОУ ВПО «Казанский (Приволжский) федеральный университет», Казань, Россия (420008, г. Казань, ул. Кремлевская, д. 18), e-mail: public.mail@ksu.ru

Вырождающиеся эллиптические уравнения представляют собой один из важных разделов современной теории дифференциальных уравнений с частными производными. В статье в n-мерном евклидовом пространстве строятся фундаментальные решения дифференциального уравнения 2m-го порядка с сингулярным оператором Бесселя, действующим по последней переменной. Такое уравнение называем В-полигармоническим уравнением. Для получения фундаментального решения данного уравнения с особенностью в произвольной точке применяется оператор обобщенного сдвига. Такие фундаментальные решения применяются к исследованию краевых задач с условиями типа четности на характеристической части границы. Выводятся первая и вторая формулы Грина. Далее дается интегральное представление найденного решения уравнения, для сведения краевой задачи к системе интегральных уравнений.

Ключевые слова: интегральное представление, дифференциальное уравнение, полигармоническое уравнение.

INTEGRATED SUBMISSION OF THE SOLUTION OF THE B-POLYHARMONIOUS EQUATION

Denisova M.Y.

Kazan (Volga region) Federal University, Kazan, Russia (420008, Republic of Tatarstan, Kazan, 18 Kremlyovskaya St.), e-mail: public.mail@ksu.ru

The degenerating elliptic equations represent one of important sections of the modern theory of the differential equations with private derivatives. In article in n-dimensional Euclidean space fundamental solutions of the differential equation 2m-go about with Bessel's acting on the last variable the singulyarny operator are under construction. Such equation we call the V-polyharmonious equation. The operator of the generalized shift is applied to obtaining the fundamental solution of this equation with feature in any point. Such fundamental decisions are applied to research of regional tasks with conditions such as parity on a characteristic part of border. Green's first and second formulas are deduced. Further there is an integrated submission of the found solution of the equation, for data of a regional task to system of the integrated equations.

Key words: integrated representation, differential equation, polyharmonic equation.

Постановка задачи

Пусть E_n^+ – полупространство $x_n > 0$ евклидова пространства E_n точек $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$. Пусть G конечная область в E_n, симметричная относительно плоскости $x_n = 0$ и ограниченная поверхностью Γ. Обозначим через G^+ часть G, расположенную в E_n^+. Граница области G^+ разбивается $\Gamma^{(0)}$ и Γ^+, расположенными соответственно на плоскости $x_n = 0$ и в полупространстве $x_n > 0$. Поверхность Γ^+ является поверхностью класса $\Lambda_{m,B}$, когда $\Gamma \in \Lambda_m$ [3].

Рассмотрим краевую задачу: найти четное по x_n решение уравнения

$$\Delta_B^m u = 0 \qquad (1)$$

в области G^+, $(2m-1)$ раз непрерывно дифференцируемое в $\overline{G^+}$ и удовлетворяющее граничным условиям

$$D_B^l u\big|_{\Gamma^+} = f_l, \quad l = \overline{0, m-1},$$

где $D_B^l = \Delta_B^p$, если $l = 2p$ и $D_B^l = \dfrac{\partial}{\partial n_\xi}\Delta_B^p$, если $l = 2p+1$, n_ξ – внешняя нормаль к границе Γ^+ в точке ξ, $\Delta_B = \sum\limits_{i=1}^{n-1}\dfrac{\partial^2}{\partial x_i^2} + B_{x_n}$, $B_{x_n} = \dfrac{\partial^2}{\partial x_n^2} + \dfrac{k}{x_n}\dfrac{\partial}{\partial x_n}$ – оператор Бесселя, k – любое положительное число, $m > 2$. Уравнение вида (1) назовем B-полигармоническим уравнением [1].

Фундаментальное решение

Известно [2], что фундаментальные решения уравнения (1) с особенностью в начале координат имеют вид

$$q_m(x) = \begin{cases} C_m^{(1)} r^{2m-\gamma}\ln r, & 2m > \gamma, \\ C_m^{(2)} r^{2m-\gamma}, & \end{cases}$$

где $r = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}$, $\gamma = n + k$.

Значения $C_m^{(1)}$ и $C_m^{(2)}$ выберем таким образом, чтобы

$$\Delta_B^l q_m = q_{m-l} \tag{2}$$

и

$$\int\limits_{E_n^+} q_1(x)\Delta_B \vartheta(x) x_n^k dx = \vartheta(0) \tag{3}$$

для любой четной по x_n бесконечно дифференцируемой и финитной в E_n^+ функции $\vartheta(x)$.

Можно проверить, q_m удовлетворяет условиям (2) и (3) при следующих значениях $C_m^{(1)}$ и $C_m^{(2)}$:

$$C_m^{(1)} = \frac{(-1)^{\frac{\gamma-2}{2}}}{2^{2m-1}\pi^{\frac{n-1}{2}}\Gamma\left(\dfrac{k+1}{2}\right)\Gamma(m)\Gamma\left(\dfrac{2m-\gamma+2}{2}\right)},$$

$$C_m^{(2)} = \frac{(-1)^m\Gamma\left(\dfrac{\gamma-2m}{2}\right)}{2^{2m-1}\pi^{\frac{n-1}{2}}\Gamma\left(\dfrac{k+1}{2}\right)\Gamma(m)}.$$

С помощью непосредственного подсчета получаем, что

$$\Delta_B^{m-1} q_m = \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)}{(2-\gamma)\pi^{\frac{n-1}{2}}\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)} \frac{1}{r^{\gamma-2}}.$$

Для получения фундаментального решения с особенностью в произвольной точке ξ применим к функции $q_m(x)$ оператор обобщенного сдвига T_ξ^x [4]:

$$Q_m(x,\xi) = T_\xi^x q_m(x) = C_k \int_0^\pi q_m\left(x_1-\xi_1,\ldots,x_{n-1}-\xi_{n-1},\sqrt{x_x^2+\xi_n^2-2x_n\xi_n\cos\varphi}\right)\sin^{k-1}\varphi d\varphi,$$

где $C_k = \dfrac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}$.

Так как операторы T_ξ^x и Δ_B коммутируют, то в силу формальной самосопряженности оператора T_ξ^x из формулы (3) следует, что

$$\int_{E_n^+} Q_1(x,\xi)\Delta_B\vartheta(\xi)\xi_n^k d\xi = \vartheta(x).$$

Формулы Грина для функций класса $C^{2m}(G^+)\cup C^{2m-1}(\overline{G^+})$

Пусть u и ω четные по x_n функции класса $C^{2m}(G^+)\cup C^{2m-1}(\overline{G^+})$. Тогда имеют место тождества

$$\Delta_B^s u \Delta_B^m \omega - \Delta_B^s \omega \Delta_B^m u = \sum_{j=0}^{m-s-1}\left(\Delta_B^{s+j} u \Delta_B^{m-j}\omega - \Delta_B^{s-j-1}\omega\Delta_B^{m+j+1}u\right), \tag{4}$$

$$\left(\Delta_B^{\frac{m}{2}}\omega\right)^2 - \omega\Delta_B^m\omega = \sum_{j=0}^{\frac{m}{2}-1}\left(\Delta_B^{\frac{m}{2}+j}\omega\Delta_B^{\frac{m}{2}-j}\omega - \Delta_B^{\frac{m}{2}-j-1}\omega\Delta_B^{\frac{m}{2}+j+1}\omega\right), \tag{5}$$

при четном m, и

$$\Delta_B^{\frac{m-1}{2}}\omega\Delta_B^{\frac{m+1}{2}}\omega - \omega\Delta_B^m\omega = \sum_{j=0}^{\frac{m-1}{2}}\left(\Delta_B^{\frac{m-1}{2}+j}\omega\Delta_B^{\frac{m+1}{2}-j}\omega - \Delta_B^{\frac{m-1}{2}-j}\omega\Delta_B^{\frac{m+1}{2}+j}\omega\right), \tag{6}$$

когда m – нечетное число.

Нам понадобятся, для четных по x_n функций $u,\omega\in C^{(2m)}(G^+)\cup C^{(2m-1)}(\overline{G^+})$, первая формула Грина

$$\int_{G^+}\omega\Delta_B\omega x_n^k dx + \int_{G^+}\sum_{i=1}^n\left(\frac{\partial\omega}{\partial x_i}\right)^2 x_n^k dx = \int_{\Gamma^+}\omega\frac{\partial\omega}{\partial n_\xi}x_n^k d\Gamma$$

и вторая формула Грина

$$\int\limits_{G^+}\left(u\Delta_B\omega-\omega\Delta_B u\right)x_n^k dx=\int\limits_{\Gamma^+}\left(u\frac{\partial\omega}{\partial n_\xi}-\omega\frac{\partial u}{\partial n_\xi}\right)x_n^k d\Gamma\,. \qquad (7)$$

Интегрируя обе части тождеств (4)–(6) по области G^+ и пользуясь формулой (7), получим обобщенные формулы Грина

$$\int\limits_{G^+}\left(\left(\Delta_B^{\frac{m}{2}}\omega\right)^2-\omega\Delta_B^m\omega\right)x_n^k dx=\sum_{j=0}^{m-1}\int\limits_{\Gamma^+} D_B^j\omega D_B^{2m-j-1}\omega x_n^k d\Gamma\,,$$

для всех четных m и

$$\int\limits_{G^+}\left(\Delta_B^{\frac{m-1}{2}}\omega\Delta_B^{\frac{m+1}{2}}\omega-\omega\Delta_B^m\omega\right)x_n^k dx=\sum_{j=1}^{m-1}(-1)^j\int\limits_{\Gamma^+} D_B^{j-1}\omega D_B^{2m-j}\omega x_n^k d\Gamma\,,$$

когда m – нечетное число, а также имеет место формула

$$\int\limits_{G^+}\left(\Delta_B^s u\Delta_B^m\omega-\Delta_B^s\omega\Delta_B^m u\right)x_n^k dx=$$

$$=\sum_{j=0}^{m-s-1}\int\limits_{\Gamma^+}\left(\Delta_B^{s+j}u\frac{\partial}{\partial n_\xi}\Delta_B^{m-j-1}\omega-\Delta_B^{m-j-1}\omega\frac{\partial}{\partial n_\xi}\Delta_B^{s+j}u\right)x_n^k d\Gamma \quad \left(s=\overline{0,m-1}\right), \qquad (8)$$

где $D_B^l=\Delta_B^p$, если $l=2p$ и $D_B^l=\dfrac{\partial}{\partial n_\xi}\Delta_B^p$, если $l=2p+1$, n_ξ – внешняя нормаль к границе Γ^+ в точке ξ.

Интегральное представление

Пусть x – внутренняя точка области $D^+\cup\Gamma^{(0)}$. Вырежем эту точку шаром Ω_ε с центром в точке x и радиуса ε, такого что $\Omega_\varepsilon\in D^+$ (если $x\in\Gamma^{(0)}$, то точку x вырежем полушаром Ω_ε^+). Поверхность шара Ω_ε обозначим S_ε (S_ε^+). Пусть $q=q(x)$ – решение уравнение (1) в области D^+.

Применяя формулу (8) к функциям $Q_m(x,\xi)$ и $q(\xi)$ в области $D^+\setminus\Omega_\varepsilon$, с учетом равенства (2), получим

$$\int\limits_{D^+\setminus\Omega_\varepsilon}\left(\Delta_B^s Q_m(x,\xi)\Delta_B^m\, q(\xi)-\Delta_B^s q(\xi)\Delta_B^m Q_m(x,\xi)\right)\xi_n^k d\xi=$$

$$=\sum_{j=0}^{m-s-1}\int\limits_{\Gamma^+}\left(Q_{m-s-j}D_B^{2m-2j-1}q-D_B^{2m-2j-2}q\frac{\partial}{\partial n_\xi}Q_{m-s-j}\right)\xi_n^k d_\xi\Gamma+$$

$$+\sum_{j=0}^{m-s-1}\int\limits_{S_\varepsilon}\left(Q_{m-s-j}D_B^{2m-2j-1}q-D_B^{2m-2j-2}q\frac{\partial}{\partial n_\xi}Q_{m-s-j}\right)\xi_n^k d_\xi S\,.$$

Меняя переменную суммирования, и заметив, что $\Delta_B^m q=0$ и $\Delta_B^m Q_m=0$ в $D^+\setminus\Omega_\varepsilon$, последнюю формулу можем записать в следующем виде

$$\sum_{s=1}^{m-j}\int_{\Gamma^{+}}\left(D_B^{2j+2s-2}q\frac{\partial}{\partial n_\xi}Q_s-Q_s D_B^{2j+2s-1}q\right)\xi_n^k d_\xi\Gamma+$$

$$+\sum_{s=1}^{m-j}\int_{S_\varepsilon}\left(D_B^{2j+2s-2}q\frac{\partial}{\partial n_\xi}Q_s-Q_s D_B^{2j+2s-1}q\right)\xi_n^k d_\xi S=0\,. \qquad (9)$$

Используя схему, предложенную в работе [5], докажем, что для $x_n>0$ и $2s<n$ $Q_s(x,\xi)$, имеет такую же особенность в точке x, что и фундаментальное решение оператора. Вводя обозначение $\left|x-\xi\right|^2\left(4x_n\xi_n\right)^{-1}=R^2$, получим

$$Q_m(x,\xi)=C_s^{(2)}C_k\left(4x_n\xi_n\right)^{\frac{2s-\gamma}{2}}\int_0^{\pi}\left(R^2+\sin^2\frac{\varphi}{2}\right)^{\frac{2s-\gamma}{2}}\sin^{k-1}\varphi d\varphi\,. \qquad (10)$$

Разность между интегралом (10) и интегралом

$$\psi(x,\xi)=\int_0^{\pi}\varphi^{k-1}\left(R^2+\frac{\varphi^2}{2}\right)^{\frac{2s-\gamma}{2}}d\varphi$$

является регулярной функцией в точке x, то есть для $R=0$. В последнем интеграле сделаем замену переменной по формуле $\varphi=2R\xi$. В результате будем иметь

$$2^k R^{2s-n}\int_0^{\pi/2R}\xi^{k-1}\left(1+\xi^2\right)^{\frac{2s-\gamma}{2}}d\xi\,.$$

Непосредственно вычисляется, что

$$\lim_{R\to0}\int_0^{\pi/2R}\xi^{k-1}\left(1+\xi^2\right)^{\frac{2s-\gamma}{2}}d\xi=\frac{1}{2}B\left(\frac{k}{2},\frac{n-2s}{2}\right)=\frac{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-2s}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{\gamma-2s}{2}\right)}\,.$$

Откуда

$$Q_s(x,\xi)=\frac{(-1)^s\Gamma\left(\frac{n-2s}{2}\right)\left(x_n\xi_n\right)^{-\frac{k}{2}}}{2^{2s}\pi^{\frac{n}{2}}\Gamma(s)}\left|x-\xi\right|^{2s-n}+\psi_s^{(1)}(x,\xi)\,. \qquad (11)$$

Используя приближенную формулу (11) получаем, что

$$\frac{\partial}{\partial n}Q_s(x,\xi)=\frac{(-1)^s\Gamma\left(\frac{n-2s+2}{2}\right)\left(x_n\xi_n\right)^{-\frac{k}{2}}}{2^{2s-1}\pi^{\frac{n}{2}}\Gamma(s)}\left|x-\xi\right|^{2s-n-1}\cos(r,n)+\psi_s^{(2)}(x,\xi)\,, \qquad (12)$$

где $r=x-\xi$, и

$$\frac{\partial}{\partial n_\xi} Q_s(x,\xi) = \frac{(-1)^s \Gamma\left(\frac{n-2s+2}{2}\right)\left(x_n\xi_n\right)^{-\frac{k}{2}}}{2^{2s-1}\pi^{\frac{n}{2}}\Gamma(s)} \left|x-\xi\right|^{2s-n-1} + \psi_s^{(3)}(x,\xi)\,. \qquad (13)$$

Из приближенных формул (11)–(13) следует, что в формуле (9) первая сумма левой части не зависит от ε, во второй сумме все слагаемые, кроме слагаемого при $s=1$ и $\varepsilon \to 0$, сходятся к нулю. Вычислим предел слагаемого при $s=1$. Его обозначим через I_ε. В силу теоремы о среднем значении интеграла, приближенных формул (11)–(13) и с учетом того, что $\left|x-\xi\right| = \varepsilon$ при $\xi \in S_\varepsilon$, получаем

$$I_\varepsilon(x,\xi) = \overline{\xi^{\frac{k}{2}} D_B^{2j} q} \frac{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}{2\ \pi^{\frac{n}{2}}} x_n^{-\frac{k}{2}} \varepsilon^{1-n} \int\limits_{S_\varepsilon} ds + \Phi_s(x,\xi) = \overline{\xi^{\frac{k}{2}} D_B^{2j} q} x_n^{-\frac{k}{2}} \varepsilon^{-(1-n)^2} + \Phi_s(x,\xi)\,,$$

то есть $D_B^{2j} q = \Delta_B^j q$.

Таким образом, имеют место следующие интегральные представления для решения уравнения (1):

$$\Delta_B^j u(x) = \sum_{s=1}^{m-j} \int\limits_{\Gamma^+} Q_s(x,\xi) D_B^{2j+2s-1} q(\xi) \xi_n^k d_\xi \Gamma - \sum_{s=1}^{m-j} \int\limits_{\Gamma^+} D_B^{2j+2s-2} q(\xi) \frac{\partial Q_s}{\partial n_\xi} \xi_n^k d_\xi \Gamma\,. \qquad (14)$$

Отсюда при $j=0$ имеем, что

$$q(x) = \sum_{s=1}^{m} \int\limits_{\Gamma^+} Q_s(x,\xi) D_B^{2s-1} q(\xi) \xi_n^k d_\xi \Gamma - \sum_{s=1}^{m} \int\limits_{\Gamma^+} D_B^{2s-2} q(\xi) \frac{\partial Q_s}{\partial n_\xi} \xi_n^k d_\xi \Gamma\,.$$

Заключение

В работе получено интегральное представление (14) найденного решения уравнения (1), необходимое для сведения краевой задачи к системе интегральных уравнений.

Список литературы

1. Денисова М.Ю. Исследование основных краевых задач для некоторых В-полигармонических уравнений методом потенциалов : дис. … канд. физ.-мат. наук. – Казань, 2002. – 99 с.

2. Киприянов И.А., Кононенко В.И. Фундаментальные решения В-эллиптических уравнений // Дифференц. уравнения. – 1967. – Т. 3. – № 1. – С. 114-129.

3. Панич О.И. О потенциалах для полигармонического уравнения четвертого порядка // Матем. сб. – 1960. – Т. 50. – № 3. – С. 335–368.

4. Раджабов Н. Интегральные представления и граничные задачи для некоторых дифференциальных уравнений с сингулярной линией или сингулярными поверхностями. – Душанбе. – 1982. – Ч. 3. – 171 с.
5. Weinstein A. Discontinuous integrals and generalired potential theory // Trans. Am. Math. Soc. – 1948. – № 63. – P. 342-354.

Рецензенты

Игнатьев Ю.Г., доктор физико-математических наук, профессор, зав. кафедрой высшей математики и математического моделирования, Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань.

Сушков С.В., доктор физико-математических наук, профессор, зав. кафедрой теории относительности и гравитации, Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань.

Криштоп Виктор Владимирович, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой «Физика», Дальневосточный государственный университет путей сообщения, г. Хабаровск, профессор Kwangwoon University, Korea.