УДК 004.5

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОЦЕНКИ ОПЦИОННОЙ СТОИМОСТИ ДЛЯ ПОДДЕРЖКИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ НА РЫНКЕ КРЕДИТНЫХ ДЕРИВАТИВОВ

Финогеев А. Г., Овечкин Р. М.

ФГБОУ ВПО «Пензенский государственный университет», г. Пенза, ул. Красная, 40, E-mail: cnit@pnzgu.ru,

В статье представлено описание разработанных алгоритмов, моделей и методик расчета подразумеваемой волатильности, оценки стоимости финансовых продуктов типа Опцион в рамках автоматизированной системы мониторинга ситуации на фондовом рынке и поддержки принятия решений в области торговли кредитными деривативами. Волатильность является важнейшим финансовым показателем в управлении финансовыми рисками, где представляет собой меру риска использования финансового инструмента за заданный промежуток времени. Волатильность выражается в абсолютном или в относительном от начальной стоимости значении. Описывается решение задачи расчета волатильности при помощи совокупности традиционных методов расчета стоимости опциона – метод Блека – Шоулза и метод биномиального дерева в комбинации с численным методом бисекционного поиска для быстрого нахождения подразумеваемой волатильности. Значения, получаемые при помощи описанных моделей, могут быть рассчитаны в режиме реального времени, благодаря возможности параметризации точности и производительности алгоритмов.

Ключевые слова: кредитный дериватив, опцион, волатильность, численные методы, бисекционный поиск, биномиальное дерево.

MATHEMATICAL MODELLING FOR OPTIONS PRICING WITHIN DECISION SUPPORT SYSTEMS ON CREDIT DERIVATIVES MARKET

Finogeev A. G., Ovechkin R. M.

Penza state university, Penza, Krasnaya 40, E-mail: cnit@pnzgu.ru

The article represents the detailed description of developed algorithms, models and methods for calculating the implied volatility, evaluating the approximate price of Option type financial products as part of development of the automated monitoring and decision support system in field of credit derivatives market trading. Implied volatility is the very important financial parameter for risk management related activities characterizing measure of risk taken by executing the financial product in specified period of time. Volatility can be expressed either as absolute value or as percentage of base price of product. Given explanation of algorithms of volatility calculation in total of methods evaluating option price (Black – Sholes and binomial tree) combining with calculus of approximations method – bisectional search. The calculation process can be performed in real-time since it allows to tune up the accuracy and performance.

Key words: credit derivative, option, volatility, calculus of approximations, bi-sectional search, binomial tree.

Введение. Кредитные операции – самая доходная статья банковского бизнеса. Управление рисками при торговле производными кредитными продуктами позволяет банку защититься от неблагоприятных изменений цен на рынке стоимости акций, процентных ставок, и т.п. Кредитные деривативы позволяют отделить кредитный риск от всех других рисков, присущих конкретному инструменту, и перенести такой риск от продавца риска (приобретателя кредитной защиты) к покупателю риска (продавцу кредитной защиты). Основной набор таких инструментов – это кредитные дефолтные свопы (CDS), опционы, фьючерсы и т. д. [1].

Для быстрого и верного принятия управленческого решения требуется проанализировать достаточный объем информации, адаптированной для понимания, то есть правильно обработанной специализированной системой мониторинга и поддержки принятия решений. В статье приводится описание разрабатываемой специализированной системы анализа рыночных сделок, которая позволяет пользователям, не имеющим достаточной квалификации, выполнять операции с большими объемами многомерных данных и использовать инструментарий интеллектуального анализа данных. Система обеспечивает поддержку принятия решений, наглядность, гибкость и высокую производительность работы биржевым трейдерам, без участия технических специалистов.

В системе также реализуется дополнительная поддержка принятия решений для торговли Опционами. Опцион – один из наиболее существенных производных финансовых инструментов. Различают два типа опционов:

- **Опцион Колл** (call). Предоставляет одной из сторон контракта, именуемой держателем опциона (holder), право купить базисный актив в указанный срок в будущем по фиксированной цене – цене исполнения опциона, которая носит также название страйковой цены или просто **страйка** (strike).
- **Опцион Пут** (put) дает право держателю опциона продать базисный актив в указанный срок в будущем (до истечения срока действия опциона – экспарации) по страйковой цене [2, 4].

Волатильность (изменчивость, англ Volatility) опциона – это статистический показатель, характеризующий тенденцию изменчивости цены. Волатильность является важнейшим финансовым показателем в управлении финансовыми рисками, где представляет собой меру риска использования финансового инструмента за заданный промежуток времени [3].

1. Постановка задачи и исходные данные. Для анализа стоимости опционов и прянятие решений о сделках, трейдер, пользующийся инструментарием разрабатываемой системы, может наряду с известными свойствами кредитного деривативa получить дополнительные значения: **расчетная стоимость опциона** и **подразумеваемая волатильность**.

В моделях оценки стоимости опционов и подразумеваемой волатильности, описанных ниже, используются следующие входные параметры:

- **Стиль опциона** – Американский или Европейский;
- **Тип опциона** – Колл или Пут;
- Количество акций на опционный контракт – **amount**;
- **S –** спот цена базисного актива-акции;
- **K** – цена страйк опциона;
- **r –** процентная ставка;

- **tk** – время от текущей даты до следующей даты выплаты дивидендов по акциям (учитываются только даты меньшие, даты экспарации опциона);
- **dk** – размер дивиденда, выплачиваемого в момент **tk**;
- **f** – альтернативная форма учета дивидендов в процентах (непрерывно начисляемая процентная ставка). Как правило, используется следуюшее допущение: если по акциям выплачиваются дивиденды дискретно, следует считать **f=0**. Однако набор значений {**dk**, **tk**} можно привести к виду непрерывно начисляемого процента f, как это будет показано ниже.
- **σ** – волатильность. Этот параметр используется абсолютно во всех моделях оценки стоимости опционов. Его теоретическое значение представляет собой среднеквадратичное отклонение спот цены базисного актива. Этот параметр не может быть измерен напрямую по рыночным данным, поэтому важной задачей любого участника рынка ценных бумаг является оценка волатильности по историческим данным, используя текущие рыночные цены опционов и т.п. Обычно величина измеряется в процентах.

Условно обозначим через **X** набор всех вышеперечисленных параметров: X = {style, type, S, t, K, r, {ti , di } or f, σ}.

Имея модель оценки стоимости опционов, можно выполнить следующие операции:

а) Рассчитать теоретическую цену опциона по заданным параметрам;

б) Рассчитать подразумеваемую волатильность, т.е. волатильность, соответствующую рыночной цене опциона.

Так как волатильность является единственным параметром, который напрямую не наблюдается по рыночным данным, то существует однозначная взаимосвязь между ценой опциона и подразумеваемой волатильностью. То есть, зная волатильность, можно вычислить цену опциона и наоборот.

2. Модель оценки стоимости опционов Блэка – Шоулза. Это первая модель оценки стоимости опционов, которая стала буквально всемирно известной [4]. Она предполагает, что цена спот акции изменяется стохастически. Это означает, что если цена известна на текущий момент, то можно сделать, например, следующее предположение: «две недели спустя цена спот будет между 10 $ и 15 $ с вероятностью в 30 %» или что-нибудь подобное. Строго говоря, если предполагается, что в любой момент в будущем log(S) нормально распределен с известным средним значением и среднеквадратичным отклонением, то, основываясь на этих данных, можно подсчитать средний доход от исполнения опциона и теоретическую цену опциона. Опуская подробности вывода формулы Блэка Шоулза, ниже приведен алгоритм расчеты цены опциона по данной модели.

Пусть **Price = PF_BS(X).**

Алгоритм вычисления:

1. Если дивиденды приведены в виде $\{t_k , d_k \}$, тогда $\{ A = S - NPV(\{t_k , d_k \}, r); f = 0;\}$, иначе $A = S * exp(-f * t)$;

2. $B = K * exp(-r * t)$;

3. $D = \sigma * sqrt(t)$;

4. $d1 = log(A / B) / D + D / 2$;

5. $d2 = d1 - D$;

6. $Price = A*\Phi(d1) - B*\Phi(d2)$;

7. If type = Put then Price = Price - A + B.

Строго говоря, **PF_BS(X)** определяет цену Европейского типа опциона, т.е. она не принимает во внимание свойство Американского типа – возможность быть исполненным до экспарации. Тем не менее она дает нижнюю границу цены Американского опциона, и это используется для того, чтобы убедиться в надежности результатов других моделей.

3. Построение биноминальных деревьев. Одним из наиболее распространенных и полезных методов оценки фондовых опционов является построение биноминального дерева, т.е. диаграммы, демонстрирующей разные варианты изменения цены акции в течение срока действия опциона. Этот метод основан на предположении, что цена акции подчиняется законам случайного блуждания (random walk). На каждом шаге по времени существует определенная вероятность того, что цена акции увеличится или уменьшится на некую относительную величину. Если величина временно́го шага стремится к нулю, то это приводит к предположению, что цены акций имеют логнормальное распределение, лежащее в основе модели Блэка – Шоулза [4].

Семейство функций прайсинга, основанных на биномиальных деревьях, используется для ценообразования опционов, как Европейского, так и Американского типа [5]. Этот подход основан на тех же допущенииях, что и модель Блэка – Шоулза, но позволяет принимать во внимание возможность досрочного исполнения для Американского типа опциона. Функция имеет 3 дополнительных входных параметра, кроме **X**:

– Количество шагов дерева **N,**
– Верхний (up) множитель изменчивости спота u,
– Нижний (down) множитель изменчивости спота d.

При этом: **N** – целое число >= 1; **u** >= 1, 0 < **d** <= 1.

Эта дискретная модель предполагает, что лежащий в основе спот может изменить свое значение **N** раз за период между сегодняшним днем и датой экспарации опциона. Также цена может либо подняться вверх на коэффициент **u**, либо снизиться на коэффициент **d** за данный временной промежуток. Эти допущения позволяют прийти к древовидной структуре

– биномиальному дереву для лежащего в основе спота, которое используется для прайсинга опционов на его базе.

Ниже рассмотрим дополнительные переменные, расчитываемые через **X, N, u** и **d**:

- **τ** – временной шаг дерева, в годах (**τ = t / N)**;
- **p** – вероятность повышения цены спота (**p=(exp((r - f)*τ) - d)/(u-d));**
- **q** – вероятность понижения цены спота (**q = 1 – p).**

4. Описание основного алгоритма. Рассмотрим подробнее, как при помощи биномиального дерева может быть вычислена цена опциона.

Обозначим теоретическую стоимость опциона на **i**-ом шаге дерева и **j**-ом уровне спота как **C(i,j)**, начиная с **N**-го шага, на котором премии (цены опционов) известны:

1. $C(N, j) = \max(S(N, j) - K, 0)$ – для опциона Колл.
2. $C(N, j) = \max(K - S(N, j), 0)$ – для опциона Пут.

Действительно, для опциона Колл, если **S(N, j) > K**, тогда будет выгодно исполнить опцион и купить базовый актив у продавца опциона по цене **K** $, и сразу же продать его по цене **S(N, j)** $ на рынке, поэтому прибыль от этой операции **S(N, j) – K** покроет цену опциона.

В другом случае, если **S(N, j) < K**, исполнять опцион будет невыгодно, так как цена базового актива на рынке бует ниже. Такой контракт не будет иметь смысла, так как хранитель опциона не обязан покупать базовый актив по невыгодной цене. Схожая логика применима к опционам типа Пут.

Теперь, цены опционов на предыдущем **(N-1)-**ом шаге для Европейского типа опциона (Колл и Пут) можно получить так:

$$C(N-1, j) = (pC(N, j+1) + qC(N, j))e^{-r\tau}. \qquad (1)$$

Для Американского типа опциона следует принимать во внимание возможность досрочного исполнения, поэтому для Американского опциона Колл:

$$C(N-1, j) = \max[S(N-1, j) - K, (pC(N, j+1) + qC(N, j))e^{-r\tau}]. \qquad (2)$$

Здесь, премия (реальная цена опциона) вычисляется как максимальное значение результата одной из стратегий:

1. Исполнить опцион немедленно **T1 = (N-1) * τ** (тогда его цена равна $\max[S(N-1, j) - K, 0]$). (3)

2. Держать опцион до тех пор, пока не станет **T2 = N * τ**, тогда цена будет снижена, как для Европейского типа опциона.

Для Американского опциона Пут:

$$C(N-1, j) = \max[K - S(N-1, j), (pC(N, j+1) + qC(N, j))e^{-r\tau}]. \qquad (4)$$

Эта функция выполняется рекурсивно на всех шагах **i = N-2, N-3 ,...,1, 0**, и, таким образом, в итоге получим:

Для Европейских опционов Колл и Пут:

$$C(i, j) = (pC(i+1, j+1) + qC(i+1, j))e^{-r\tau}, \qquad (5)$$

Для Американского опциона Колл:

$$C(i, j) = \max[S(i, j) - K, (pC(i+1, j+1) + qC(i+1, j))e^{-r\tau}], \qquad (6)$$

Для Американского опциона Пут:

$$C(i, j) = \max[K - S(i, j), (pC(i+1, j+1) + qC(i+1, j))e^{-r\tau}], \qquad (7)$$

Когда достигнут шаг **i = 0**, цена опциона будет составлять **C(0, 0)**.

5. Методика расчета подразумеваемой волатильности. Если прямое назначение методов оценки опционов заключается в расчете теоретической стоимости опциона по исходным данным (цене и волатильности базисного актива; страйку и времени до экспирации опциона; процентной ставке), то при определении подразумеваемой волатильности решается обратная задача. Известными считаются все перечисленные параметры, за исключением волатильности, вместо которой дается цена опциона. При увеличении волатильности от нуля стоимость опциона монотонно возрастает, поэтому существует единственное значение волатильности, при котором теоретическая стоимость сравнивается с заданной ценой (при условии, что цена лежит в диапазоне возможных стоимостей опциона). Найденное таким образом значение волатильности и называется подразумеваемым или опционным.

Зная определенное значение волатильности **σ**, можно получить теоретическую стоимость опциона, используя для прайсинга некоторую функцию:

Price = PF_XXX(σ, Y), где **PF_XXX()** – функция прайсинге, **σ** – волатильность, **Y** – все остальные параметры, необходимые для расчета стоимости опциона, как было описано выше.

Для оценки стоимости опциона при совершении сделок трейдеру необходимо знать, какая волатильность подразумевается рыночной стоимостью опциона, т.е. расчитать волатильность как функцию от стоимости опциона в рамках модели, используемой при расчете этой стоимости.

σ = IV_XXX(Price, Y).

Здесь и далее **IV_XXX()** обозначает функцию расчета подразумеваемой волатильности в рамках используемой при расчете стоимости модели (**PF_XXX()**). Как правило, аналитическое выражение для функции **IV_XXX()** является слишком сложным для программной реализации. Поэтому подразумеваемая волатильность **σ** вычисляется приближенно – путем перебора различных значений **σ** так, чтобы попытаться минимизировать абсолютную разность между рыночной стоимостью опциона (**Price)** и значением функции **PF_XXX(σ, Y)**.

Для этого будем использовать принцип бисекционного (логарифмического) поиска, который является численным методом. Бисекционный поиск также известен как метод деления пополам или дихотомия, т.е. алгоритм поиска элемента в отсортированном массиве, элементы которого отсортированы в определенном порядке. Частным случаем двоичного поиска является метод бисекции, который применяется для поиска корней заданной непрерывной функции на заданном отрезке. Логарифмическим алгоритм называется потому, что количество шагов (итераций) поиска для ряда n элементов будет не больше логарифма числа n основанию 2.

Применимость этого метода для поиска требуемой волатильности опциона основана на следующем: цена опциона никогда не уменьшится при увеличении его волатильности, чем выше волатильность, тем выше и стоимость опциона, применимо ко всем типам опционов. Объяснение этому следующее: высокая волатильность означает крупные изменения цены базового спота, из-за чего можно ожидать большей прибыли, если цена спота изменится в «нужном направлении» при высокой волатильности. С другой стороны, если цена спота изменяется в «невыгодном направлении», держатель опциона всегда может избежать убытков, просто не исполняя его, если это не выгодно.

Все вышесказанное применительно к математическим терминам означает следующее: если известно два значения волатильности **σ1** и **σ2**, то:

PF_XXX(σ_1, Y) < Price < PF_XXX(σ_2, Y).

Тогда подразумеваемая волатильность **σ** ограничена: $\sigma_1 < \sigma < \sigma_2$.

На каждом шаге бинарного поиска берется среднее значение волатильности $\sigma_{new} = (\sigma_1 + \sigma_2) / 2$, на основе этого значения вычисляется значение функции **PF_XXX(σ_{new}, Y)** и сравнивается с рыночной ценой опциона **Price**. Если значение функции меньше, чем **Price**, становится ясно, что $\sigma_{new} < \sigma < \sigma_2$, в случае, если больше: $\sigma_1 < \sigma < \sigma_{new}$. Повторяя процедуру несколько раз, мы получим значение подразумеваемой волатильности с высокой точностью, которая с каждым шагом возрастает квадратично. К примеру, после 10 шагов точность вычисления подразумеваемой волатильности будет выше, чем $(\sigma_2 - \sigma_1) / 1000$, а после 20 шагов – выше, чем $(\sigma_2 - \sigma_1) / 1000000$, и так далее.

6. Заключение. В статье приведены методы решений, алгоритм расчета рекомендуемой стоимости по модели Блэка – Шоулза или с использованием биноминальных деревьев, методика определения подразумеваемой волатильности для кредитных деривативов опционного типа. Предлагаемые модели и методики используются в разрабатываемой системе мониторинга и поддержки принятия решений в области биржевого трейдинга. Программное приложение может использовать любую из описанных выше моделей вычисления стоимости – Блэка – Шоулза или метод биномиальных деревьев.

Список литературы

1. Буренин А. Н. Рынки производных финансовых документов. М.: ИНФРА-М, 1996. 456 с.
2. Захаров В. Интеллектуальные технологии в современных системах управления // Проблемы теории и практики управления. – 2005. – № 4. – С. 96 – 100.
3. Лаврушин О. И. Банковское дело: современная система кредитования: учебное пособие / О. И.Лаврушин, О. Н.Афанасьева, С. Л.Корниенко; под ред. засл. деят. науки РФ, д-ра экон. наук, проф. О. И. Лаврушина. – 3-е изд., доп. – М.: КНОРУС, 2007. – 264 с.
4. Tett, Gillian. The Dream Machine: Invention of Credit Derivatives // Financial Times. March 24, 2006. – 372 с.
5. Turban et al.. Information Technology for Management, Transforming Organizations in the Digital Economy. Massachusetts: John Wiley & Sons, Inc., 2008. – 428 с.

Рецензенты:

Бершадский А. М., д.т.н., профессор, зав. кафедрой САПР, ФГОУ ВПО «Пензенский государственный университет», г. Пенза.

Бождай А. С., д.т.н., профессор кафедры САПР, ФГОУ ВПО «Пензенский государственный университет», г. Пенза.