

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОПОРНОГО ГАЗОВОГО ПОДШИПНИКА, РАБОТАЮЩЕГО В ГИБРИДНОМ РЕЖИМЕ

Логинов В. Н., Космынин А. В., Широкова З. В., Медведовская Ю. А.

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет», Комсомольск-на-Амуре, Россия (681013, Комсомольск-на-Амуре, ул. Ленина, 27), e-mail: ynl_55@mail.ru

Рассмотрено аналитическое решение задачи определения эксплуатационных характеристик частично пористого цилиндрического подшипника с внешним наддувом газа, работающего в гибридном режиме (при вращающемся вале). В основе методики лежит модифицированное уравнение Рейнольдса, решение которого представляется в виде суммы двух решений. Первое – соответствует решению статической задачи определения поля давления (без вращения вала). Второе решение находится с помощью метода разложения по малому параметру, в качестве которого используется число сжимаемости. В результате решения задачи определяется несущая способность подшипника, жесткость его смазочного слоя, угол положения нагрузки. Сравнение теоретических результатов расчета с опытными данными характеристик различных частично пористых газовых подшипников показало не вполне удовлетворительную точность.

Ключевые слова: пористая среда, газовый подшипник, газовая смазка, несущая способность, жесткость смазочного слоя.

MATHEMATICAL MODEL OF THE REFERENCE GAS BEARINGS OPERATING IN HYBRID MODE

Loginov V. N., Kosmynin A. V., Shyroкова Z. V., Medvedovskaya Y. V.

State educational institutional of higher professional educational «Komsomolsk-na-Amure state technical university», Komsomolsk-on-Amur, Russia (681013, Komsomolsk-on-Amur, Lenin street, 27), e-mail: ynl_55@mail.ru

Consider the analytic solution for the performance part of the porous cylindrical bearing with external pressurization gas, operating in hybrid mode (with a rotating shaft). The methodology used is a modified Reynolds equation, the solution of which is the sum of the two solutions. First – corresponds to the solution of the static problem determination of the pressure field (without shaft). The second solution is using the expansion in the small parameter, which is used as the number of compressibility. The solution of the problem is determined bearing load capacity, stiffness its lubricant layer, the angular position of the load. Comparison of the theoretical calculation results with the experimental data of the characteristics of various partially porous gas bearing shows a quite satisfactory accuracy.

Keywords: the porous environment, the gas bearing, the gas greasing, bearing ability, stiffness of the lubricant layer.

Настоящая работа является продолжением работы [8], в которой была изложена аналитическая методика расчета эксплуатационных характеристик частично пористых газостатических подшипников. Ниже рассмотрена аналитическая методика расчета характеристик таких опор при вращающемся вале, т.е. при работе опор в гибридном режиме.

Гибридный режим работы бесконтактных подшипников с внешним наддувом газа характеризуется наличием дополнительной подъемной силы, возникающей в результате вращения ротора. Механизм ее образования заключается в том, что при вращении эксцентрично расположенного во вкладыше вала газ под действием касательных сил вязкости увлекается его поверхностью и вгоняется в клиновидный зазор между валом и вкладышем. Такое явление называют эффектом самогенерации давления или эффектом смазочного клина [1]. С учетом внешнего наддува это приводит к дополнительному сжатию

газа в смазочном слое и такому распределению давления, в результате которого несущая способность подшипника увеличивается. Гибридный режим работы подшипников называют также комбинированным.

Вращение вала, в отличие от случая работы опор в режиме подвеса, приводит к асимметричному распределению давления газа в зазоре [4, 5, 7, 10]. Вследствие этого, вал смещается от равновесного положения в направлении своего вращения и образует отличный от нуля угол ориентации нагрузки ψ (рис. 1). Следует отметить, что малый угол ориентации нагрузки считается целесообразным с точки зрения устойчивой работы опоры [3].

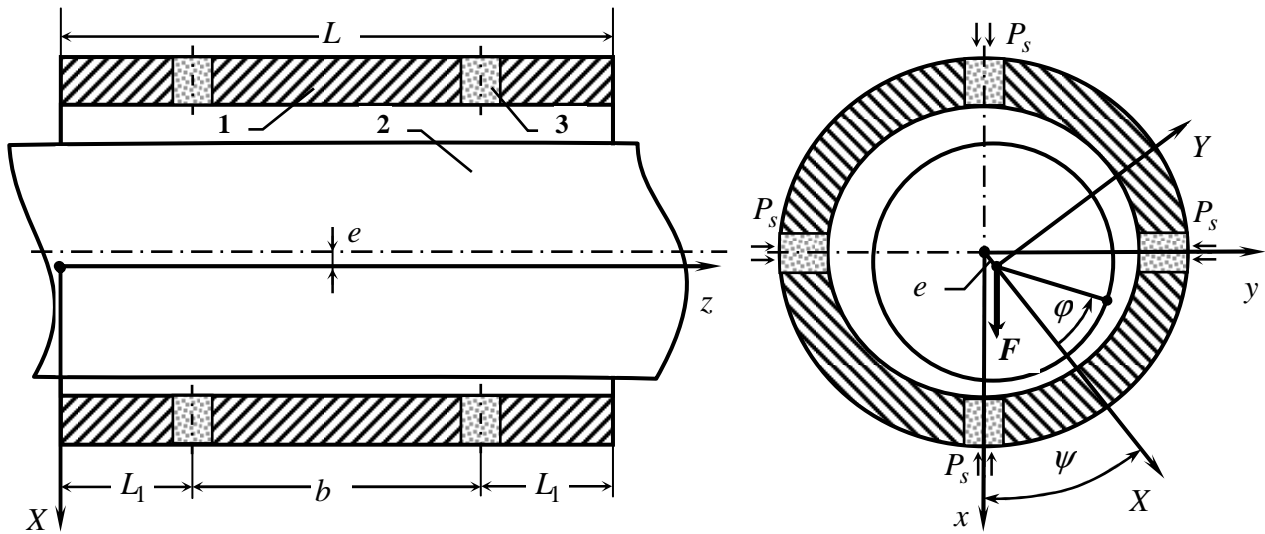


Рис. 1. Газовый подшипник с двумя рядами пористых вставок:

1 – непроницаемая часть вкладыша подшипника; 2 – вал; 3 – пористая вставка

При работе газовых опор в гибридном режиме дифференциальное уравнение для поля давления принимает вид $(H^3 PP'_s)'_s + (H^3 PP'_z)'_z = 6\mu\omega R(HP)'_s$ или в безразмерных координатах

$$(h^3 pp'_\phi)'_\phi + (h^3 pp'_\zeta)'_\zeta = \Lambda(hp)'_\phi, \quad (1)$$

где $\phi = s/R$, $\zeta = z/R$, ω – угловая скорость вращения вала, $p = P/\bar{P}$ – относительное давление, \bar{P} – среднее давление в зазоре подшипника, полученное при решении статической задачи ($\omega = 0$) [8], $h = H/c = 1 - \varepsilon \cos \phi$ – относительная толщина смазочного слоя,

$\Lambda = \frac{6\mu\omega R^2}{\bar{P}c^2}$ – число сжимаемости. Решение этого уравнения будем искать в виде

$p = p_0 + p_\omega$, где $p_0 = p_0(\phi, \zeta)$ – решение статической задачи ($\omega = 0$), $p_\omega = p_\omega(\phi)$ – газодинамическая составляющая давления.

При подстановке $p = p_0 + p_\omega$ в уравнение (1) получаем

$$(h^3(p_0 p'_{0\varphi} + p_\omega p'_{\omega\varphi} + p_0 p'_{\omega\varphi} + p_\omega p'_{\omega\varphi}))'_\varphi + (h^3(p_0 p'_{0\zeta} + p_\omega p'_{\omega\zeta}))'_\zeta = \Lambda(h(p_0 + p_\omega))'_\varphi.$$

В последнем уравнении сумма первого и пятого слагаемых тождественно равна нулю. В оставшихся слагаемых, в первом приближении, заменим давление p_0 средним значением $\bar{p}_0 = 1$, в результате получаем уравнение $(h^3(1 + p_\omega) p'_{\omega\varphi})'_\varphi = \Lambda(h(1 + p_\omega))'_\varphi$.

Первый интеграл этого уравнения имеет вид

$$h^3(1 + p_\omega) p'_\omega = \Lambda(h(1 + p_\omega) - C), \quad (2)$$

здесь и далее штрих – производная по φ . Это обыкновенное дифференциальное уравнение, которое в квадратурах не интегрируется. Будем решать его методом малого параметра, в качестве которого можно принять относительный эксцентриситет или число сжимаемости. Тестирующие расчеты показали, что в достаточно широком изменении режимных и конструктивных параметров опоры, более адекватно экспериментальным данным отвечают расчеты, в которых малым параметром является число сжимаемости Λ .

Разложим относительное давление $p_\omega = p_\omega(\varphi)$ в ряд по степеням Λ : $p_\omega = \sum_{i=1}^{\infty} p_i \Lambda^i$,

$p'_\omega = \sum_{j=1}^{\infty} p'_j \Lambda^j$. Постоянная интегрирования C в уравнении (2) также зависит от Λ , поэтому

ее тоже раскладываем в ряд: $C = \sum_{k=0}^{\infty} C_k \Lambda^k$. Подставляя эти разложения в уравнение (2),

получаем

$$h^3 \left(\sum_{j=1}^{\infty} p'_j \Lambda^j + \sum_{i,j=1}^{\infty} p_i p'_j \Lambda^{i+j} \right) = \Lambda \left(h - C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (h p_k - C_k) \Lambda^k \right). \quad (3)$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях Λ , получаем бесконечную систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. При интегрировании этих уравнений, будут появляться интегралы вида $I_s(\varphi) = \int h^{-s} d\varphi$, которые можно выразить через интегралы $J_s = J_s(\alpha, \varphi) = \int (\alpha - \cos \varphi)^{-s} d\varphi$.

Для последних интегралов легко получить рекуррентную формулу. Действительно, дифференцируя J_s по параметру α , находим $(J_s)'_\alpha = -s J_{s+1}$ или

$$J_{s+1} = -(J_s)'_\alpha / s. \quad (4)$$

Первый интеграл J_1 вычисляется непосредственно:

$$J_1 = 2(\alpha^2 - 1)^{-1/2} \arctg \left(\sqrt{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}} \operatorname{tg}(\varphi/2) \right).$$

Если ввести обозначения: $\beta = \alpha - \cos \varphi$, $f_0 = f_0(\varphi) = \arctg \left(\sqrt{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}} \operatorname{tg}(\varphi/2) \right)$, то

$$J_1 = k_{10} f_0(\varphi), \text{ где } k_{10} = 2(\alpha^2 - 1)^{-1/2}.$$

Дифференцируя J_1 необходимое число раз и используя рекуррентную формулу (4), последовательно находим:

$$J_2 = k_{20} f_0(\varphi) + k_{21} \beta^{-1} \sin \varphi, \quad k_{20} = 2\alpha(\alpha^2 - 1)^{-3/2}, \quad k_{21} = (\alpha^2 - 1)^{-1};$$

$$J_3 = k_{30} f_0(\varphi) + (k_{31} \beta^{-1} + k_{32} \beta^{-2}) \sin \varphi,$$

$$k_{30} = (1 + 2\alpha^2)(\alpha^2 - 1)^{-5/2}, \quad k_{31} = 3\alpha(\alpha^2 - 1)^{-2}/2, \quad k_{32} = (\alpha^2 - 1)^{-1}/2;$$

$$J_4 = k_{40} f_0(\varphi) + (k_{41} \beta^{-1} + k_{42} \beta^{-2} + k_{43} \beta^{-3}) \sin \varphi,$$

$$k_{40} = (2\alpha^3 + 3\alpha)(\alpha^2 - 1)^{-7/2}, \quad k_{41} = (4 + 11\alpha^2)(\alpha^2 - 1)^{-3}/6, \quad k_{42} = 5\alpha(\alpha^2 - 1)^{-2}/6, \quad k_{43} = (\alpha^2 - 1)^{-1}/3;$$

$$J_5 = k_{50} f_0(\varphi) + (k_{51} \beta^{-1} + k_{52} \beta^{-2} + k_{53} \beta^{-3} + k_{54} \beta^{-4}) \sin \varphi,$$

$$k_{50} = (8\alpha^4 + 24\alpha^2 + 3)(\alpha^2 - 1)^{-9/2}/4, \quad k_{51} = (50\alpha^3 + 55\alpha)(\alpha^2 - 1)^{-4}/24,$$

$$k_{52} = (26\alpha^2 + 9)(\alpha^2 - 1)^{-3}/24, \quad k_{53} = 7\alpha(\alpha^2 - 1)^{-2}/12, \quad k_{54} = (\alpha^2 - 1)^{-1}/4;$$

$$J_6 = k_{60} f_0(\varphi) + (k_{61} \beta^{-1} + k_{62} \beta^{-2} + k_{63} \beta^{-3} + k_{64} \beta^{-4} + k_{65} \beta^{-5}) \sin \varphi,$$

$$k_{60} = (8\alpha^5 + 40\alpha^3 + 15\alpha)(\alpha^2 - 1)^{-11/2}/4, \quad k_{61} = (274\alpha^4 + 607\alpha^2 + 64)(\alpha^2 - 1)^{-5}/120,$$

$$k_{62} = (154\alpha^3 + 161\alpha)(\alpha^2 - 1)^{-4}/120, \quad k_{63} = (47\alpha^2 + 16)(\alpha^2 - 1)^{-3}/60, \quad k_{64} = 9\alpha(\alpha^2 - 1)^{-2}/20, \quad k_{65} = (\alpha^2 - 1)^{-1}/5.$$

При этом $I_s(\varphi) = \alpha^s J_s(\varphi)$, $s = 1, 2, \dots$.

При интегрировании уравнений системы (3) будут появляться постоянные интегрирования, значения которых определяются следующим образом. Из условия отсутствия перетекания смазки в направлении оси $O\zeta$ ($p_\omega = p_\omega(\varphi)$) получаем равенство [2]

$$\int_{-\pi}^{\pi} p_\omega^2 h^3 d\varphi = 0, \text{ откуда находим:}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} p_1 h^3 d\varphi = 0; \quad \int_{-\pi}^{\pi} (p_m + 0,5 \sum_{s=1}^{m-1} p_s p_{m-s}) h^3 d\varphi = 0, \quad m = 2, 3, 4, \dots \quad (5)$$

Приравнявая коэффициенты при первой степени Λ , из системы (3) получаем уравнение $p_1' = (h - C_0)h^{-3}$, решение которого имеет вид

$$p_1 = \alpha^2 J_2(\varphi) - C_0 \alpha^3 J_3(\varphi) - \gamma_1, \quad (6)$$

где γ_1 – постоянная интегрирования. Из первого равенства системы (5) получаем

$$\gamma_1 = \frac{1}{2\pi(1 + 3\varepsilon^2/2)} \int_{-\pi}^{\pi} (\alpha^2 J_2(\varphi) - C_0 \alpha^3 J_3(\varphi)) h^3 d\varphi = 0, \text{ так как функции } J_2(\varphi), J_3(\varphi) \text{ нечетные, а}$$

функция h^3 – четная. Постоянная C_0 находится из условия непрерывности функции $p_1(\varphi)$:

$$\alpha^2 k_{20} - C_0 \alpha^3 k_{30} = 0, \quad C_0 = \varepsilon k_{20} / k_{30} = 2(1 - \varepsilon^2) / (2 + \varepsilon^2).$$

Подставляя постоянную интегрирования C_0 в равенство (6) и приводя подобные слагаемые, получаем решение первого приближения

$$p_1 = -K_1(h^{-1} + h^{-2})\sin\varphi, \quad (7)$$

где $K_1 = \varepsilon/(2 + \varepsilon^2)$.

При $k=1$ из системы (3) получаем второе уравнение $h^3(p_2' + p_1 p_1') = h p_1 - C_1$ или, с использованием равенства $p_1' = (h - C_0)h^{-3}$, $p_2' = (C_0 p_1 - C_1)h^{-3}$, откуда

$$p_2 = K_2(h^{-3}/3 + h^{-4}/4) - C_1 \alpha^3 J_3(\varphi) - \gamma_2,$$

где $K_2 = C_0/(2 + \varepsilon^2)$.

Из условия непрерывности функции $p_2(\varphi)$ получаем $C_1 = 0$, а из второго равенства системы (5) ($m=2$):

$$\int_{-\pi}^{\pi} (p_2 + p_1^2/2)h^3 d\varphi = 0, \quad \gamma_2 = \frac{1}{2\pi(1 + 3\varepsilon^2/2)} \int_{-\pi}^{\pi} (p_2^\circ + p_1^2/2)h^3 d\varphi,$$

где $p_2^\circ = K_2(h^{-3}/3 + h^{-4}/4)$. Таким образом, второе решение имеет вид

$$p_2 = K_2(h^{-3}/3 + h^{-4}/4) - \gamma_2. \quad (8)$$

При $k=2$ из системы (3) находим $h^3(p_3' + p_1 p_2' + p_1' p_2) = h p_2 - C_2$, откуда:

$$p_3' = K_2(h^{-5}/3 + h^{-6}/4) - \gamma_2 h^{-2} - C_2 h^{-3} - (p_1 p_2)',$$

$$p_3 = K_2(\alpha^5 J_5(\varphi)/3 + \alpha^6 J_6(\varphi)/4) - \gamma_2 \alpha^2 J_2(\varphi) - C_2 \alpha^3 J_3(\varphi) - p_1 p_2 - \gamma_3. \quad (9)$$

Здесь, в силу нечетности функций $J_s(\varphi)$, $s=2,3,5,6$ и функции $p_1 p_2$ (p_1 – нечетная,

p_2 – четная), из третьего равенства системы (5) ($m=3$): $\int_{-\pi}^{\pi} (p_3 + p_1 p_2)h^3 d\varphi = 0$, получаем

$\gamma_3 = 0$. Постоянная C_2 находится из условия непрерывности функции p_3 и вычисляется по формуле

$$C_2 = \frac{K_2(k_{50}\alpha^3/3 + k_{60}\alpha^4/4) - \gamma_2 k_{20}}{\alpha k_{30}}.$$

По аналогичной схеме находится давление p_4 . Формула, по которой вычисляется p_4 , в виду ее громоздкости, не приводится. Следует отметить, что p_4 является четной функцией и представляет собою линейную комбинацию обратных степеней h со второй по шестую.

В результате, используя формулы (7) – (9), получаем приближенное решение уравнения (3) $p_\omega = \Lambda p_1 + \Lambda^2 p_2 + \Lambda^3 p_3 + \Lambda^4 p_4$ с точностью $o(\Lambda^4)$.

С целью проверки адекватности математической модели было проведено сравнение с опытными данными, полученными на экспериментальных стендах [6, 9] ФГБОУ ВПО

«КНАГТУ». На рис. 2 представлены результаты расчетов и экспериментальные данные для двухрядного подшипника, имеющего следующие геометрические размеры: длина подшипника $L = 60$ мм, диаметр подшипника $D = 50$ мм; средний радиальный зазор $c = 45$ мкм, диаметр пористых вставок $d = 6,3$ мм; раздвижка линий наддува $b = 30$ мм, высота вставок $\delta = 7,5$ мм. В одном ряду наддува располагалось 6 вставок. В качестве пористых вставок использовалась модифицированная древесина березы с коэффициентом проницаемости $k_p = 4,23 \cdot 10^{-12} \text{ м}^2$.

Для представления характеристик подшипника в зависимости от безразмерного комплекса прямо пропорционального среднему радиальному зазору, в рассмотрение введен конструктивный параметр $K_c = c \cdot \sqrt[3]{\ln(1 + \delta/R)/12k_p R}$, который был равен $K_c = 0,266$.

Испытания подшипника выполнены при относительном давлении наддува $p_s = 1/6$ и числе сжимаемости $B = \frac{6\mu\omega R^2}{P_s c^2} \left(\Lambda = B \frac{P_s}{P} \right)$, равном $B = 0,126$.

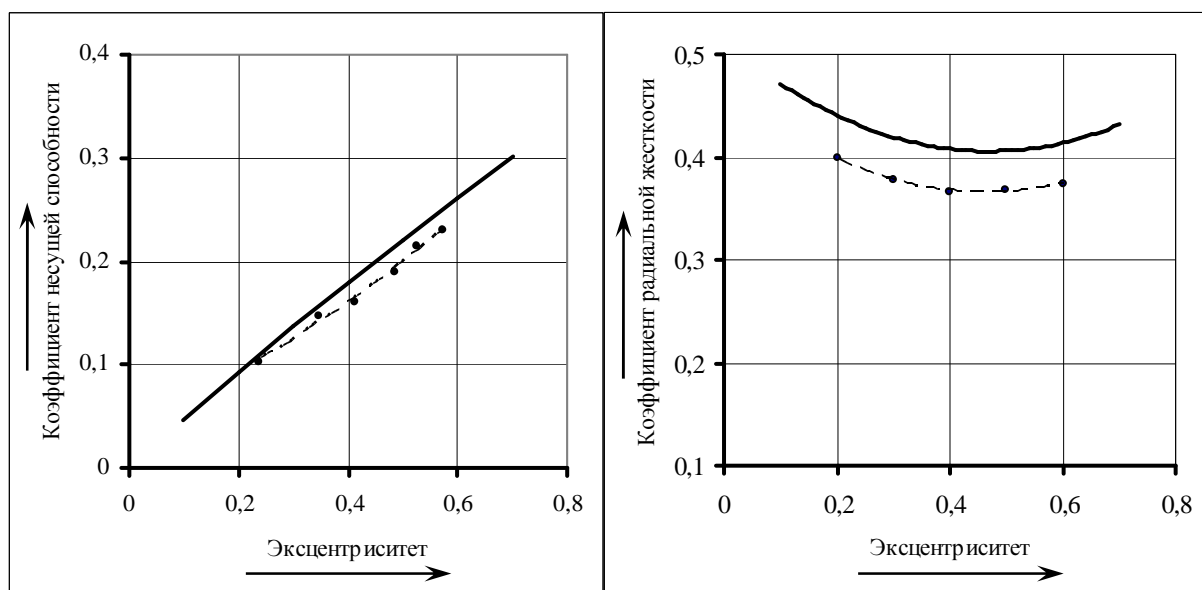


Рис. 2. Зависимости от эксцентриситета коэффициентов:
а) несущей способности, б) радиальной жесткости.

————— – теоретические расчеты, - - - - - – экспериментальные данные

Основные интегральные характеристики вычислялись по формулам: $Q = \sqrt{Q_x^2 + Q_y^2}$ –

несущая способность, $Q_x = R \int_0^L \int_{-\pi}^{\pi} P(\varphi, z) \cos \varphi d\varphi dz$, $Q_y = R \int_0^L \int_{-\pi}^{\pi} P(\varphi, z) \sin \varphi d\varphi dz$

$C_Q = \frac{Q}{2RL(P_s - P_a)}$ – коэффициент несущей способности, $k_s = (C_Q)'_{\varepsilon}$ – коэффициент радиальной жесткости смазочного слоя.

Из представленных графиков видна хорошая согласованность теоретических и опытных данных. Максимальная относительная погрешность при вычислении Q , k_s не превосходит 10 %.

Список литературы

1. Высокоскоростной шпиндельный узел внутришлифовального станка для прецизионной обработки деталей летательных аппаратов / А. В. Космынин, В. С. Щетинин, А. С. Хвостиков, А. В. Смирнов, С. С. Блинков // *Фундаментальные исследования*. – 2011. – Ч.1, № 8. – С. 137-138.
2. Константиnescу В. Н. Газовая смазка. – М.: Машиностроение, 1968. – 718 с.
3. Космынин А. В., Чернобай С. П., Виноградов С. В. Расчет частично пористых газовых подшипников высокоскоростных шпиндельных узлов // *Автоматизация и современные технологии*. – 2008. – № 10. – С. 8-12.
4. Космынин А. В., Шаломов В. И. Аэростатические шпиндельные опоры с частично пористой стенкой вкладыша // *Современные проблемы науки и образования*. – 2006. – № 2. – С.69-70.
5. Космынин А. В., Щетинин В. С. Расчет несущей способности газоманитных опор высокоскоростных шпиндельных узлов // *СТИН*. – 2010. – № 9. – С. 6-8.
6. Космынин А. В., Щетинин В. С. Эксплуатационные показатели высокоскоростных шпиндельных узлов металлообрабатывающего оборудования с газоманитными опорами // *Успехи современного естествознания*. – 2009. – № 11. – С. 69-70.
7. Космынин А. В., Щетинин В. С., Иванова Н. А. Методика расчета несущей способности газоманитного подшипника высокоскоростного шпиндельного узла // *Вестник Самарского ГТУ*. – 2010. – №4. – С. 226-229.
8. Логинов В. Н., Космынин А. В., Широкова З. В. Аналитическое решение задачи определения характеристик цилиндрического газового подшипника // *Современные проблемы науки и образования*. – 2012. – № 5; URL: <http://www.science-education.ru/105-7188> (дата обращения: 18.10.2012).
9. О результатах экспериментальной проверки расчётных характеристик высокоскоростных шпиндельных узлов металлорежущих станков с частично пористыми газостатическими опорами / А. В. Космынин, В. И. Шаломов, И. Г. Суходоев, С. В. Виноградов // *Фундаментальные исследования*. – 2009. – №1. – С. 32-33.

10. Щетинин В. С., Космынин А. В. Математическая модель расчета несущей способности высокоскоростного шпиндельного узла на газомангнитной опоре // Трение и смазка в машинах и механизмах. – 2010. – № 8. – С. 31-35.

Рецензенты:

Олейников А. И., д.ф.-м.н., профессор, зав. кафедрой «Механика и анализ конструкций и процессов» ФГБОУ ВПО «Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет», г. Комсомольск-на-Амуре.

Биленко С. В., д.т.н., доцент, зав. кафедрой «Технология машиностроения» ФГБОУ ВПО «Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет», г. Комсомольск-на-Амуре.