

УДК 519.116

ОБ ИДЕАЛЬНЫХ И СОВЕРШЕННЫХ РАЗБИЕНИЯХ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

КИНДЕР М. И.

ФГАОУ ВПО «Казанский (Приволжский) федеральный университет», Казань, Россия (420008, г. Казань, ул. Кремлевская, 18.), e-mail: mkinder@rambler.ru

Разбиение натурального числа называется идеальным, если каждое меньшее число можно единственным образом представить в виде линейной комбинации частей этого разбиения с коэффициентами -1 , 0 или 1 . Указанное разбиение связано с известной задачей о взвешивании с помощью набора гирь, которые можно ставить на обе чашки весов. В статье предлагается простое доказательство вычислительных рекуррентных формул, связанных с подсчетом количества упорядоченных факторизаций натурального числа. С помощью аппарата производящих функций удастся получить простое доказательство явной формулы Мак-Магона для подсчета упорядоченных факторизаций натуральных чисел, а также некоторые новые соотношения в случае, когда канонические разложения чисел не содержат квадратов простых множителей. Для натуральных чисел, в разложении которых каждый простой множитель входит только один раз, установлена связь количества упорядоченных факторизаций с экспоненциальными числами Белла и Стирлинга второго рода.

Ключевые слова: совершенное разбиение числа, идеальное разбиение числа, упорядоченная факторизация, числа Белла и числа Стирлинга второго рода.

ON SUB-PERFECT AND PERFECT PARTITIONS OF INTEGERS

KINDER M. I.

Kazan (Volga region) Federal University, Kazan, Russia (420008, Kazan, Kremlin street, 18.), e-mail: mkinder@rambler.ru

A perfect partition of a natural number is one which contains one, and only one, partition of every lower number. A sub-perfect partition of a number is such that, taking its parts positively or negatively, it is possible to compose in only one manner every lower number. Our results include explicit enumeration formulas and some combinatorial identities. The purpose of the research is to give a simple proof recurrence relations that count the number of ordered factorizations of natural numbers. Using the method of generating functions, we obtain a simple proof of an explicit formula for calculating McMahon ordered factorizations of natural numbers, and some new recurrence relations when these numbers have only two prime factors. For such natural numbers we found the relationship between the number of ordered factorizations and exponential Bell numbers and Stirling numbers of the second kind.

Keywords: perfect partition of integers, sub-perfect partition of integers, ordered factorization, Bell numbers and Stirling numbers of the second kind.

ВВЕДЕНИЕ. Всякое представление натурального числа суммой натуральных чисел называется разбиением числа. Разбиения изучаются в задачах, прежде всего, комбинаторного и теоретико-числового характера. К классическим комбинаторным относятся задачи подсчета и перечисления разбиений данного типа, в теории чисел решают проблемы об аддитивных представлениях чисел с арифметическими ограничениями на слагаемые. В этой статье мы изучаем вопросы, связанные с подсчетом числа так называемых *совершенных* и *идеальных разбиений* натурального числа, устанавливаем новые рекуррентные соотношения для подсчета числа таких разбиений для чисел специального вида.

ИДЕАЛЬНЫЕ И СОВЕРШЕННЫЕ РАЗБИЕНИЯ. Понятие идеального разбиения (subperfect partition) числа ввел П. Мак-Магон [4], решая так называемую обобщенную задачу Баше о гирях: найти *всевозможные* наборы гирь (необязательно разных), с помощью которых можно взвесить любой груз в целое число граммов от 1 до M включительно, если гири разрешается ставить на обе чашки весов. При этом существенно, что каждое взвешивание должно осуществляться единственным образом. Например, если $M = 40$, то с помощью набора из четырех гирь в 1, 3, 9 и 27 граммов можно взвесить единственным способом любой груз от 1 до 40 граммов включительно. Указанный набор гирь не является единственным. Всего имеется восемь наборов гирь, позволяющих отвесить любое целое число граммов от 1 до 40 при условии, что гири можно ставить на обе чашки весов: 1^{40} ; $1^3 1^3$; $1^4 9^4$; $1^3 1^9 4^4$; $1^{13} 27^1$; $1^3 4^2 27^1$; $1^4 9^1 27^1$; $1^3 1^9 1^2 27^1$. (Здесь w^m обозначает m гирь весом w каждая.) Среди этих решений только последний набор содержит наименьшее число гирь и только в нём одном все гири разные.

Обобщенная задача Баше о нахождении наборов гирь для конкретных чисел M встречалась на математических олимпиадах школьников разного уровня, а также на одном из командных соревнований по программированию среди студенческих команд. Для эффективного решения задачи необходимо, по сути, составить рекурсивный алгоритм, с помощью которого вычисление общего количества таких наборов сводится к аналогичной задаче о подсчете числа разбиений меньшего числа M' .

Перейдем к решению задачи в общей постановке. Разбиение неотрицательного целого числа $M = m_1 + m_2 + \dots + m_s$ назовем *идеальным*, если каждое целое число t от 0 до M можно представить единственным образом в виде $t = \alpha_1 m_1 + \alpha_2 m_2 + \dots + \alpha_s m_s$, где каждое $\alpha_i \in \{-1, 0, 1\}$, при этом повторяющиеся части m_i считаются неразличимыми. Если все части разбиения m_i рассматривать как разновесы для весов, каждое такое представление указывает единственный способ взвешивания массы t с помощью гирь массой m_i . При этом $\alpha_i = 0$ означает, что гиря с массой m_i не участвует во взвешивании, а в случае $\alpha_i = -1$ ($\alpha_i = 1$) гиря m_i находится на той же (на другой) чашке весов, что и масса t .

Для описания всех таких разбиений сначала рассмотрим аналогичную задачу о взвешивании, в которой гири разрешается ставить только на одну чашу. В этом случае нам придется рассматривать такие разбиения целого числа $M = m_1 + m_2 + \dots + m_s$, в которых каждое целое число t от 0 до M представляется единственным образом в виде $t = \gamma_1 m_1 + \gamma_2 m_2 + \dots + \gamma_s m_s$, причем каждое $\alpha_i \in \{0, 1\}$. (Повторяющиеся части m_i по-прежнему считаются неразличимыми.) Такие разбиения числа M называются *совершенными*.

ТЕОРЕМА 1. [4] *Количество совершенных разбиений числа M совпадает с количеством упорядоченных разложений числа $M + 1$ в произведение натуральных чисел без единичных множителей.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В каждом совершенном разбиении, очевидно, должна содержаться, по крайней мере, одна часть, равная 1. Предположим, что в нём содержится $q_1 - 1$ частей, равных единице. Тогда все числа, меньшие q_1 , обладают только одним разбиением, и, значит, число q_1 будет следующей частью совершенного разбиения. Пусть теперь в разбиении содержится $q_2 - 1$ частей, равных q_1 , тогда все числа от 1 до $q_1 - 1 + q_1(q_2 - 1) = q_1q_2 - 1$ единственным способом выражаются с помощью 1 и q_1 . Продолжая рассуждения аналогичным образом, приходим к совершенному разбиению вида

$$1^{q_1-1} q_1^{q_2-1} (q_1 q_2)^{q_3-1} \dots (q_1 q_2 \dots q_{s-1})^{q_s-1}. \quad (1)$$

Сумма всех составных частей этого разбиения равна M , поэтому

$$M = q_1 - 1 + q_1(q_2 - 1) + \dots + (q_1 q_2 \dots q_{s-1})(q_s - 1) = q_1 q_2 \dots q_{s-1} q_s - 1,$$

и значит, q_i являются делителями числа $M + 1$. Таким образом, упорядоченный набор чисел q_1, q_2, \dots, q_s полностью определяет данное разбиение, при этом каждый сомножитель q_i больше 1.

ТЕОРЕМА 2. *Количество идеальных разбиений числа M совпадает с количеством совершенных разбиений числа $2M$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $M = m_1 + m_2 + \dots + m_s$ — идеальное разбиение числа, то есть любое целое число t от 0 до M представляется единственным образом в виде $t = \alpha_1 m_1 + \alpha_2 m_2 + \dots + \alpha_s m_s$, где каждое $\alpha_i \in \{-1, 0, 1\}$. Тогда разбиение числа $2M = m_1 + m_1 + m_2 + m_2 + \dots + m_s + m_s$ является совершенным. Действительно, если $0 \leq t \leq M$, то число $M - t$ также лежит в диапазоне от 0 до M , и по определению идеального разбиения $M - t$ есть линейная комбинация слагаемых m_i с коэффициентами $\alpha_i \in \{-1, 0, 1\}$. Тогда $t = M - (M - t) = \sum (1 - \alpha_i) m_i$, где $1 - \alpha_i \in \{0, 1, 2\}$. Если же $M \leq t \leq 2M$, то число $t - M$ находится в диапазоне от 0 до M и единственным способом представляется в виде линейной комбинации частей m_i с коэффициентами $\alpha_i \in \{-1, 0, 1\}$. Тогда $t = (t - M) + M$ будет линейной комбинацией тех же частей с коэффициентами $1 + \alpha_i \in \{0, 1, 2\}$. Таким образом, любое целое число 0 до $2M$ представляется единственным образом в виде $\gamma_1 m_1 + \gamma_2 m_2 + \dots + \gamma_s m_s$, причем $\gamma_i \in \{0, 1, 2\}$. Другими словами, части $m_1, m_1, m_2, m_2, \dots, m_s, m_s$ образуют совершенное разбиение числа $2M$.

Докажем теперь, что каждому совершенному разбиению числа $2M$ соответствует некоторое идеальное разбиение числа M . Количество совершенных разбиений по теореме 1 совпадает с числом упорядоченных факторизаций числа $2M + 1$, поэтому достаточно доказать соответствие между упорядоченными разложениями $2M + 1$ на множители и идеальными разбиениями числа M . Пусть $2M + 1 = q_1 q_2 \dots q_s$, и все сомножители в этом произведении больше 1. Кроме того, каждое q_i – нечетное число, и значит, $q_i - 1$ – четное число, не меньшее 2. По определению каждое целое m между 0 и $2M$ единственным образом представляется в виде линейной комбинации частей разбиения с коэффициентами $\alpha_i \in \{0, 1\}$. Так как $q_i - 1$ – четные, то все части совершенного разбиения (1) числа $2M$ входят в это разбиение *четное* число раз. Уменьшив количество частей вдвое, мы получим разбиение числа M

$$1^{\frac{q_1-1}{2}} q_1^{\frac{q_2-1}{2}} (q_1 q_2)^{\frac{q_3-1}{2}} \dots (q_1 q_2 \dots q_{s-1})^{\frac{q_s-1}{2}}, \quad (2)$$

при этом любое целое m от 0 до $2M$ представляется в виде линейной комбинации этих частей с коэффициентами $\gamma_i \in \{0, 1, 2\}$. С помощью аналогичных рассуждений из первой части теоремы, мы получаем, что (2) дает идеальное разбиение числа M . Теорема доказана.

Приведенные выше идеальные разбиения для числа $M = 40$ соответствуют упорядоченным факторизациям числа $2M + 1 = 81 = 3 \cdot 27 = 9 \cdot 9 = 3 \cdot 3 \cdot 9 = 27 \cdot 3 = 3 \cdot 9 \cdot 3 = 9 \cdot 3 \cdot 3 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$.

КОЛИЧЕСТВО УПОРЯДОЧЕННЫХ ФАКТОРИЗАЦИЙ. Пусть $N > 1$. Количество нетривиальных упорядоченных факторизаций числа $N = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_s^{n_s}$ зависит только от показателей n_1, n_2, \dots, n_s , обозначим это количество через $T(n_1, n_2, \dots, n_s)$.

ТЕОРЕМА 3. Для функции $T(n_1, n_2, \dots, n_s)$ справедлива рекуррентная формула

$$T(n_1, n_2, \dots, n_s) = \sum'_{k_i} T(k_1, k_2, \dots, k_s), \quad (3)$$

где сумма берётся по всем наборам, в которых $0 \leq k_i \leq n_i$ ($1 \leq i \leq s$) и $k_1 + k_2 + \dots + k_s < n_1 + n_2 + \dots + n_s$, причем $T(0, 0, \dots, 0) = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $d = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_s^{k_s}$ – произвольный нетривиальный делитель числа N , отличный от N , то есть $N = md$ и $m > 1$. Тогда всякая факторизация числа N , у которой первый множитель равен m , получается из соответствующей факторизации числа d , причём число последних, очевидно, равно $T(k_1, k_2, \dots, k_s)$. Отсюда следует равенство (3).

Формулы для подсчёта количества упорядоченных факторизаций сильно упрощаются в тех случаях, когда в каноническом разложении натурального $N \geq 2$ все простые множители входят только в первых степенях, то есть когда все n_i равны 1. В формулировке следующей теоремы для набора $n_1 = n_2 = \dots = n_s = 1$ используем обозначение 1^s .

ТЕОРЕМА 4. *Для натуральных чисел, разложения которых не содержат квадратов простых чисел, справедливо рекуррентное соотношение*

$$T(1^s) = \sum_{k=0}^{s-1} C_s^k T(1^k), \quad T(1^0) = 1. \quad (4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Все делители числа $N = p_1 p_2 \dots p_s$ описываются наборами (k_1, k_2, \dots, k_s) , где каждое k_i равно 0 или 1. Очевидно, существует C_s^1 наборов, в которых все k_i , кроме одного, равны 0; существует C_s^2 наборов, в которых все k_i , кроме двух, равны 1, и т.д. Этим наборам соответствуют равные слагаемые в формуле (3), и значит, сумма в правой части (3) для каждого k содержит C_s^k слагаемых, равных $T(1^k)$. Отсюда приходим к формуле (4).

ТЕОРЕМА 5. *Количество упорядоченных факторизаций числа $N = p_1 p_2 \dots p_s$ равно экспоненциальному числу Белла порядка s , то есть*

$$T(1^s) = \sum_{k=1}^s k! S(s, k) = \sum_{k=1}^s \sum_{i=1}^k (-1)^{k-i} C_k^i i^s, \quad (5)$$

где $S(s, k)$ – число Стирлинга второго рода.

ПРИМЕР 1. Пусть $s = 3$ и $n_1 = n_2 = n_3 = 1$. По формуле (5) получаем

$$T(1,1,1) = 1 + (-2 + 8) + (3 - 24 + 27) = 13.$$

ПРИМЕР 2. Пусть $s = 4$ и $n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = 1$. По формуле (4)

$$T(1,1,1,1) = \sum_{k=0}^3 C_4^k T(1^k) = 1 + 4 \cdot 1 + 6 \cdot 3 + 4 \cdot 13 = 75.$$

Отметим также связь специальных функций с числом упорядоченных факторизаций $T(n_1, n_2)$, доказанную в статье [1].

ТЕОРЕМА 6. *Количество упорядоченных факторизаций числа $N = p_1^{n_1} p_2^{n_2}$ равно*

$$T(n_1, n_2) = (-1)^{n_1} 2^{n_2-1} P_{n_1}^{(n_2-n_1, 0)}(-3) = \frac{2^{n_1-n_2-1}}{n_1!} \cdot \frac{d^{n_1}}{dx^{n_1}} [(1+x)^{n_1} (1-x)^{n_2}] \Big|_{x=-3},$$

где $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ – многочлен Якоби степени n .

СЛЕДСТВИЕ. Количество упорядоченных факторизаций числа $N = (p_1 p_2)^n$ равно

$$T(n, n) = 2^{n-1} P_n(3) = \frac{1}{2n!} \cdot \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \Big|_{x=3},$$

где $P_n(x)$ – многочлен Лежандра степени n .

Общая формула для подсчета числа упорядоченных факторизаций с помощью комбинаторных рассуждений была получена П. Мак-Магоном [5]. Другая, более сложная вычислительная формула, установлена также в работе [3]. Иной подход к определению количества совершенных разбиений предложен в работе [2], в которой получены новые рекуррентные формулы для функции T . С помощью этих соотношений вычисление числа разбиений сводится к задаче нахождения количества разбиений числа N на части, каждая из которых не меньше 2. Для вычисления этого количества требуется подсчитать число разбиений на части, не меньшие 3 и т. д.

Список литературы

1. Киндер М. И. О совершенных разбиениях натуральных чисел // Современные проблемы науки и образования. – 2012. – № 5; URL: www.science-education.ru/105-6986 (дата поступления: 07.09.2012).
2. Кручинин В. В. Число разбиений натурального числа n на части, каждая из которых не менее m // Математические заметки. – 2009. – Т. 86, № 4. – С. 538-542.
3. Kühnel U. Über die Anzahl der Produktdarstellungen der positiven ganzen Zahlen // Archiv der Mathematik. – 1950. – Vol. 2, № 3. – S. 216–219.
4. MacMahon P. A. Certain special partitions of numbers // Quarterly Journal of pure and applied Mathematics. – 1886. – Vol. 21. – P. 367-373.
5. MacMahon P. A. Memoir on the Theory of the Compositions of Numbers // Philosophical Transactions of the Royal Society of London (A). – 1893. – Vol. 184. – P. 835-901.

Рецензенты:

Елизаров А. М., доктор физико-математических наук, профессор, зам. директора по научной деятельности, Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань.

Игнатъев Ю. Г., доктор физико-математических наук, профессор, зав. кафедрой высшей математики и математического моделирования, Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань.

Антонов Александр Владимирович, д.т.н., профессор, декан факультета "Кибернетики", Обнинский институт атомной энергетики Национального исследовательского ядерного университета МИФИ Министерства образования и науки РФ, г. Обнинск.