УДК 62-50: 531.8

МЕТОД МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО СИНТЕЗА ПРИ ПОСТРОЕНИИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

Лазаренко С. В.[1] , Костоглотов А. А.[1], Костоглотов А. И.[2], Чеботарев А. В.[3]

[1]*Минобрнауки России, Ростовский технологический институт сервиса и туризма (филиал) Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Южно-Российский государственный университет экономики и сервиса», 344016, г. Ростов-на-Дону, ул. Варфоломеева 215, e-mail: rh3311@mail.ru, kostoglotov@aaanet.ru*

[2]*Минобрнауки России, Ростовский государственный институт путей сообщения, 344038, г. Ростов-на-Дону, ул. Шеболдаева 2,e-mail: kostoglotovai@gmail.com*

[3] *Федеральное государственное казенное учреждение Пограничный научно-исследовательский центр ФСБ России, 101000, г. Москва, ул. Академика Волгина 37 А. e-mail: chebotarev.a.v@mail.ru*

Применение процедуры механико-математического синтеза обеспечило получение оптимального решения задачи управления механической системой в положении неустойчивого равновесия. Ее суть заключается в применении метода неопределенных множителей Лагранжа и привлечении дополнительной информации о свойствах динамического объекта, которые выражаются известным принципом механики в форме интеграла действия Гамильтона – Остроградского. Соответствующая обратная связь получена с точностью до синтезирующей функции в общем виде для нелинейных систем. Для ее построения в работе использован метод представления траектории в фазовом пространстве, где выполняется условие постоянства обобщенного кинетического потенциала. Математическое моделирование показало, что в сравнении с известными методами предлагаемый подход при простоте аналитических выражений и минимуме объема вычислительных затрат отличается высокой точностью расчетов.

Ключевые слова: оптимальное управление, нелинейные модели, синтезирующая функция, фазовая траектория.

METHOD OF THE MECHANIC - MATHEMATICAL SYNTHESIS AT CREATION OF OPTIMUM CONTROL BY MECHANICAL SYSTEMS

Lazarenko S. V.[1], Kostoglotov A. A.[1], Kostoglotov A. I.[2], Chebotarev A. V.[3]

[1] *Minobrnauki Russia, Rostov Institute of Technology Service and Tourism (branch) of Federal State Institution of Higher Professional Education "South-Russian State University of Economics and Service", 344016, Rostov-on-Don, st. Varfolomeeva 215,e-mail: kostoglotov@aaanet.ru, rh3311@mail.ru*

[2] *Minobrnauki Russia, Rostov State University of Railways, 344038, Rostov-on-Don, st. Sheboldaeva 2, e-mail: kostoglotov@gmail.com*

[3] *Federal public state institution FSB Boundary research center of Russia, 101000, Moscow, Academician Volgin St. 37 And. e-mail: chebotarev.a.v@mail.ru*

Application of procedure of the mechanic – mathematical synthesis ensured the optimum solution of a problem of management of mechanical system in position of unstable balance. Its essence consists in application of a method of uncertain multipliers of Lagranzha and attraction of additional information on properties of dynamic object which are expressed by a known principle of mechanics in the form of integral of action of Hamilton – Ostrogradsky. The corresponding feedback is received to within synthesizing function in a general view for nonlinear systems. For its construction in work the method of representation of a trajectory in phase space where the condition of constancy of the generalized kinetic potential is satisfied is used. Mathematical modeling showed that in comparison with known methods the offered approach at simplicity of analytical expressions and a minimum of volume of computing expenses differs high precision of calculations.

Keywords: optimal control, nonlinear models, the synthesis function, the phase trajectory.

Введение

Существует ряд прикладных задач, где требуется управлять объектом в положении неустойчивого равновесия [1]. Оценку эффективности предлагаемых решений часто проводят по результатам решения классической задачи механики и теории управления, заключающейся в приведении двухзвенного маятника из произвольного начального положения в произвольное неуравновешенное состояние и удержания ее там. Это связано с тем, что уравнение состояния такой динамической системы представляет собой упрощенную модель механического двухзвенного манипулятора робота с безредукторными приводами и абсолютно жесткими элементами конструкции. Управление таким объектом осуществляется за счет изменения вращающих моментов в шарнирах устройства.

Их решение достигается как классическими методами, базирующимися на принципе максимума Л. С. Понтрягина [9] или методе динамического программирования Р. Беллмана [4], так и основанными, к примеру, на концепции обратных задач динамики, функциях Ляпунова, идее декомпозиции [1, 7]. Однако недостатком первых является то, что решение задачи синтеза для нелинейных систем получено только для частных случаев. Для второй группы методов, как правило, характерно введение различного рода упрощений и ограничений [1, 7].

Работы [2, 3, 5, 6] показывают, что использование механико-математического приема, названного объединенный принцип максимума, позволяет получить оптимальные, конструктивные, достаточно просто реализуемые на практике решения. Полученные в работе управления определены с точностью до синтезирующей функции. Для ее построения в статье предлагается использовать метод анализа поверхности переключения в фазовом пространстве переменных Лагранжа, где обобщенная сила меняет знак и выполняется условие постоянства обобщенного кинетического потенциала.

Проведенное математическое моделирование показало высокую эффективность использования объединенного принципа максимума, заключающуюся в повышении точности расчетов, уменьшении сложности процедуры синтеза и вычислительных затрат в сравнении с классическими [5, 7, 9].

Постановка задачи. Движение управляемой системы подчиняется принципу Гамильтона – Остроградского, согласно которому обращается в нуль величина [8]:

$$\delta' R = \int_{t_0}^{t_k} (\delta T + \delta' A) dt = 0, \quad t \in [t_0, t_k]. \tag{1}$$

Целевой функционал представлен следующим выражением:

$$J_1 = \int_{t_0}^{t_k} F(q, \dot{q}, u, t) dt \to \min,$$
$$t = t_0, \; q(t_0) = q_0; \; \dot{q}(t_0) = \dot{q}_0; \qquad t = t_k, \; q(t_k) = q_k; \; \dot{q}(t_k) = \dot{q}_k, \tag{2}$$

где $q \in [q_1, ..., q_n]$; $\dot{q} \in [\dot{q}_1, ..., \dot{q}_n]$ – обобщенные координаты и скорости, $F(q, \dot{q}, u, t)$ – определенно-положительная функция, $T = \frac{1}{2} \sum_{s,k=1}^{n} a_{sk} \dot{q}_s \dot{q}_k$ – кинетическая энергия,

$\delta' A = \sum_{s=1}^{n} Q_s \delta q_s$ – элементарная работа обобщенных сил, зависящих от управлений, $Q_s = Q_s(q, \dot{q}, u, t)$; $u = \{u_j\} \in \overline{G_u}$; $s = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$.

Из принципа (1) следуют уравнения Лагранжа второго рода:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial T}{\partial q_s} = Q_s, \quad s = \overline{1, n}. \tag{3}$$

Требуется определить такие управления $u \in \overline{G_u}$ или $Q \in \overline{G_Q}$, которые переводят систему (3) из начального состояния $t = t_0$ в конечное $t = t_k$, при условии минимума целевого функционала (2).

Объединенный принцип максимума. *Теорема* [5, 6]. Условие экстремума (2) определяет максимум функции обобщенной мощности:

$$\Phi(q, \dot{q}, Q) = \sum_{s=1}^{n} (\lambda Q_s + V_s)\dot{q}_s = \max_{Q_\varepsilon \in \overline{G_Q}} \sum_{s=1}^{n} (\lambda Q_{\varepsilon s} + V_{\varepsilon s})\dot{q}_s . \tag{4}$$

где $V_s = \dfrac{\partial F}{\partial q_s}$ – фиктивная сила, зависящая от формы целевого функционала, при этом $\lambda = const > 0$, а на концах траектории $t = t_0$, $t = t_k$ выполняются условия трансверсальности для функции Гамильтона – Остроградского и обобщенного кинетического потенциала:

$$H = \lambda(T + A) + F = 0, \tag{5}$$

$$L = \lambda(T - A) + F = 0. \tag{6}$$

Основные элементы доказательства. Использование техники асинхронного и игольчатого варьирования к расширенному функционалу (2) приводится к условиям трансверсальности (5), (6) и асинхронной вариации функционала для произвольной обобщенной силы $Q \in \overline{G_Q}$:

$$\Delta J = \sum_{s=1}^{n} \int_{t_0}^{t_k} \left[\lambda\left(-\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} + \frac{\partial T}{\partial q_s} + Q_s\right) + V_s \right] \delta q_s dt . \tag{7}$$

Из сравнения (7) и асинхронной вариации ΔJ_ε, полученной для $Q_{\varepsilon s} \neq Q_s$, при $\varepsilon \to 0$, $V_{\varepsilon s} - V_s \to 0$, $q_\varepsilon \to q$, $\dot{q}_\varepsilon \to \dot{q}$, $\delta\dot{q} \to 0$, $\delta q \to 0$, следует выражение второй вариации функционала:

$$\begin{aligned} \Delta^2 J_{\text{II}} &= \sum_{s=1}^{n} \int_{\tau}^{\tau+\varepsilon\delta t} \left[\lambda(Q_{\varepsilon s} - Q_s) + (V_{\varepsilon s} - V_s) \right] \delta q_s dt = \\ &= \sum_{s=1}^{n} \left[\lambda(Q_{\varepsilon s} - Q_s) + (V_{\varepsilon s} - V_s) \right] \delta q_s \varepsilon \delta t, \end{aligned} \tag{8}$$

При предельном переходе: $\varepsilon \to 0$, $V_{\varepsilon s} - V_s \to 0$, $q_\varepsilon \to q$, $\dot{q}_\varepsilon \to \dot{q}$, $\delta\dot{q} \to 0$, $\delta q \to 0$ получаем:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\Delta^2 J_\varepsilon}{\varepsilon^2} = -\sum_{s=1}^{n} \left[\lambda(Q_{\varepsilon s} - Q_s) + (V_{\varepsilon s} - V_s)\right] \dot{q}_{\varepsilon s} \delta t^2 > 0 . \qquad (9)$$

Если обобщенная сила Q_s выбрана так, что неравенство выполняется для любых $Q_{\varepsilon s}$, то из (9) вытекает теорема объединенного принципа максимума (4). Из (4) следует, что обобщенные силы с точностью до синтезирующей функции $\mu_s(q, \dot{q})$ находятся из выражения:

$$Q_s = \lambda^{-1}\left[\mu_s(q, \dot{q})\dot{q}_s - V_s\right], \quad s = \overline{1, n}, \qquad (10)$$

которое определяет в фазовом пространстве гиперповерхности переключения управления.

Построение синтезирующей функции на основе метода представления траектории в фазовом пространстве. Так как гиперповерхности переключения обобщенная сила равна нулю, условия трансверсальности (6) преобразуются в условие постоянства обобщенного кинетического потенциала в данный момент времени:

$$L(q, \dot{q}, t) = \lambda T(q, \dot{q}) - F(q, \dot{q}) = l = const . \qquad (11)$$

Это уравнение представляет собой поверхность гиперболического параболоида в фазовом пространстве переменных Лагранжа $q_s, \dot{q}_s \; (s = \overline{1, n})$.

Преобразование Лежандра функции $L(q, \dot{q}, t)$ по переменным $\dot{q}_s \; (s = \overline{1, n})$ есть функция Гамильтона (5), представляющая поверхность эллипсоида в переменных Гамильтона $q_s, p_s \; (s = \overline{1, n})$:

$$H(q, p, t) = \lambda T + F = \frac{1}{2}\lambda \sum_{s,k=1}^{n} \frac{A_{sk}}{D} p_s p_k + F = h = const , \qquad (12)$$

в которой величины $\dot{q}_s$ выражены через q_s, p_s, t, при помощи уравнений:

$$p_s = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}, \quad s = \overline{1, n} \qquad (13)$$

для обобщенных импульсов, при этом преобразовании величины q, t играют роль параметров. A_{sk} – алгебраическое дополнение элемента a_{sk} гессиана кинетического потенциала:

$$D = \det \left\| \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_s \partial \dot{q}_k} \right\|_{s,k=1}^{n} = \det\left\| a_{sk} \right\| \neq 0 . \qquad (14)$$

На поверхности эллипсоида переключения управления канонические уравнения Гамильтона имеют вид:

$$\frac{dq_s}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_s} = \lambda \dot{q}_s;\ \lambda \frac{dp_s}{dt} = \mu_s \dot{q}_s - V_s + \lambda \frac{\partial T}{\partial q_s} = \mu_s \dot{q}_s;\ \ s = \overline{1,n}\ , \tag{15}$$

так как кинетический потенциал системы на поверхности:

$$L = \lambda T - F = const. \tag{16}$$

Синтезирующая функция записывается в следующем виде [6]:

$$\mu_s = \lambda \frac{dp_s}{dq_s} = \frac{V_s}{\dot{q}_s}; \qquad s = \overline{1,n}, \tag{17}$$

имеющая смысл углового коэффициента касательной к траектории на поверхности переключения.

Пример. Рассмотрим двойной механический маятник [2, 3] (рисунок 1).

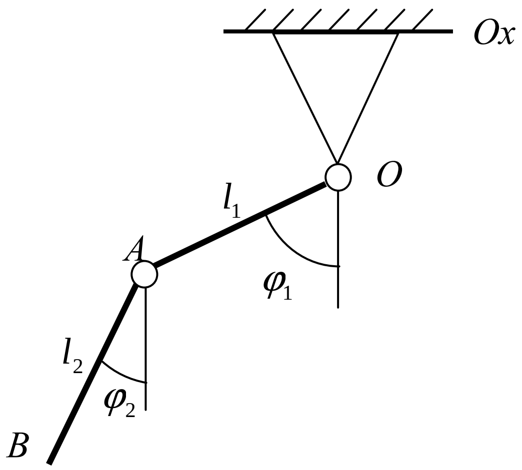

Рис. 1. Двойной маятник

Выбор в качестве обобщенных координат углов φ_1 и φ_2 позволяет записать кинетическую и потенциальную энергию такой системы в следующей форме:

$$T = \frac{1}{2}\left[(I_1 + m_2 l_1^2)\dot{\varphi}_1^2 + l_1 l_2 m_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 + I_2\dot{\varphi}_2^2\right], \tag{18}$$

$$\Pi = g\left[l_1(0.5m_1 + m_2)(1 - \cos\varphi_1) + 0.5 l_2 m_2 (1 - \cos\varphi_2)\right], \tag{19}$$

тогда уравнения Лагранжа второго рода (3) принимают вид:

$$\begin{aligned}
&(I_1 + m_2 l_1^2)\ddot{\varphi}_1 + 0.5 m_2 l_1 l_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)\ddot{\varphi}_2 - \\
&\qquad - 0.5 m_2 l_1 l_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1)\dot{\varphi}_2^2 + g l_1 (0.5 m_1 + m_2)\sin\varphi_1 = u_1; \\
&0.5 m_2 l_1 l_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)\ddot{\varphi}_1 + I_2\ddot{\varphi}_2 + \\
&\qquad + 0.5 m_2 l_1 l_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1)\dot{\varphi}_1^2 + 0.5 g l_2 m_2 \sin\varphi_2 = u_2.
\end{aligned} \tag{20}$$

где g – ускорение свободного падения; m_1, m_2 – массы стержней; l_1, l_2 – длины стержней.

Требуется синтезировать законы ограниченных управлений $\overline{G}_u$: $u_s(q, \dot{q}, t) \in [-U_s, U_s]$; $U_s = 5000$; $s = 1,2$ таких, что двойной маятник можно перевести из произвольного начального положения: $t=0,\ \varphi_s(0),\ \dot{\varphi}_s(0)\ (s=\overline{1,2})$ в произвольное неуравновешенное состояние $\varphi_1(t_k)$, $\varphi_2(t_k)$ и управлять заданным движением $x_1(t),\ x_2(t)$ относительно этого нового положения уравновешенности [8].

Функционал качества управления имеет вид:

$$J=0.5\int_0^{t_k}\{[\varphi_1-x_1(t)]^2+[\varphi_2-x_2(t)]^2\}dt\to\min. \tag{21}$$

Оптимальные решения для кусочно-постоянных управлений полученные методом объединенного принципа максимума имеют вид [5, 6]:

$$u_s(q,\dot{q},t)=U_s sign\left[-\frac{\dot{\varphi}_s|\dot{\varphi}_s|D}{\varepsilon_s}-(\varphi_s-x_s(t))\right],\quad s=1,2;\quad \varepsilon_1=19000, \tag{22}$$

$$u_s(q,\dot{q},t)=U_s sign\left[-\frac{p_s|\dot{\varphi}_s|}{2U_s\lambda^{-1}}-(\varphi_s-x_s(t))\right],\quad s=1,2;\quad \varepsilon_2=17100, \tag{23}$$

где $\lambda^{-1}=0.87;\ x_1=0.3\sin 4t;\ x_2(t)=0.2\sin 7t$. Достигнутые значения целевого функционала составили $J=0.295$ и $J=0.291$ соответственно.

Оптимальное решение в классе кусочно-непрерывных управлений, полученное методом объединенного принципа максимума, записывается в следующей форме:

$$u_s(q,\dot{q},t)=\lambda^{-1}\left[-\frac{\dot{\varphi}_s|\dot{\varphi}_s|D}{L_s|\varphi_s-x_s(t)|+\varepsilon_s}-(\varphi_s-x_s)\right]\in\overline{G_u};\quad s=1,2. \tag{24}$$

Здесь $\varepsilon_1=3000$; $\varepsilon_2=2200$; $\lambda^{-1}=40000$; $L_1=13500$; $L_2=1400$; $x_1(t)=0.3\sin 4t;\ x_2(t)=0.2\sin 7t.$ Достигнутое значение целевого функционала $J=0.291$.

Результаты математического моделирования приведены на рисунках 2–3.

На рис. 2 показаны фазовые портреты: линия 1 – решение в классе кусочно-непрерывных управлений; линия 2 – решение в классе кусочно-постоянных управлений.

На рис. 3 показана структура ограниченного измеряемого управления. Достигнутое значение целевого функционала $J=0.0245$. При неограниченном росте параметра ограничения значение целевого функционала сколь угодно мало $J\to 0$.

На рис. 4 показаны в сравнении: синтезируемый закон управления – линия 1, точное значение закона управления – точки 2; опрокидывающая сила в уравновешенном состоянии – линия 3; изменения опрокидывающей силы при колебаниях – линия 4.

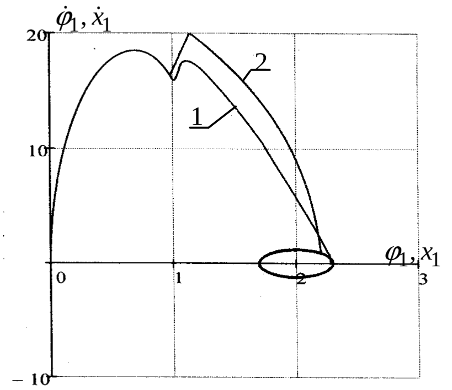

Рис. 2. Фазовые портреты

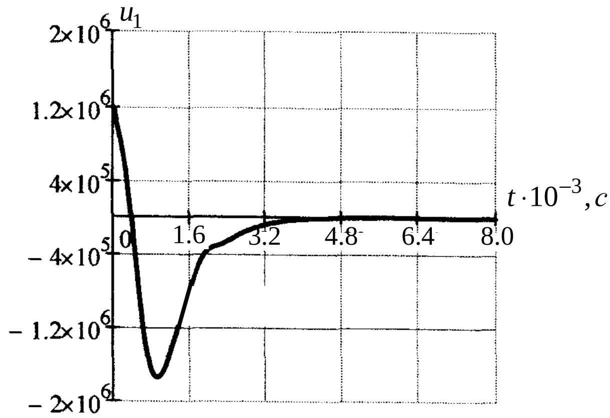

Рис. 3. Структура ограниченного измеряемого управления

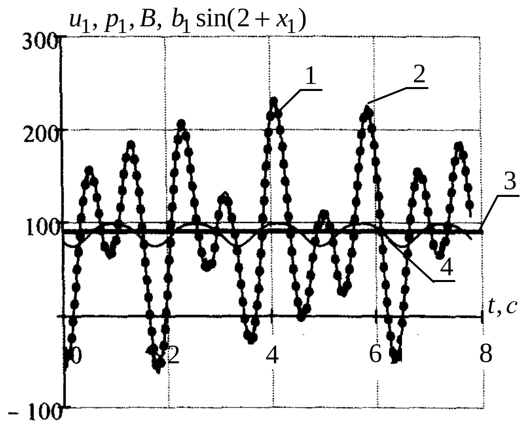

Рис. 4. Закон управления

Выводы

Новый метод синтеза оптимального управления двойным маятником в неуравновешенном конечном состоянии с использованием синтезирующей функции по предлагаемому методу обладает универсальностью и простотой. Его применение для класса кусочно-непрерывных и кусочно-постоянных управлений и обеспечивает высокую точность расчетов, требует меньших вычислительных затрат в сравнении с известными решениями.

Исследование проведено при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации, соглашение 14B37.21.2067

Список литературы

1. Ананьевский И. М. Непрерывное управление по обратной связи возмущенными механическими системами // ПММ. – 2003. – Т. 67. – Вып.2. – С. 163–178.

2. Андрашитов Д. С., Костоглотов А. А., Кузнецов А. А., Лазаренко С. В., Дерябкин И. В. Синтез алгоритма автономного управления математическим маятником на основе объединенного принципа максимума // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Технические науки. – 2010. – № 3 (155). – С. 9–15.

3. Андрашитов Д. С., Костоглотов А. А., Костоглотов А. И., Лазаренко С. В. Многопараметрическая идентификация конструктивных параметров методом объединенного принципа максимума. Инженерный вестник Дона. – 2011. – № 1. http://www.ivdon.ru/magazine/latest/n1y2011/page/2/.

4. Беллман Р. Динамическое программирование. – М.: ИЛ, Наука, 1960.

5. Костоглотов А. А., Костоглотов А. И., Лазаренко С. В. Объединенный принцип максимума в задачах оценки параметров движения маневрирующего летательного аппарата // Радиотехника и электроника. – 2009. – Т. 54. – № 4. – С. 450–457.

6. Костоглотов А. А., Костоглотов А. И., Лазаренко С. В. Объединенный принцип максимума в задаче синтеза оптимального управления нелинейными системами // Автоматика и вычислительная техника. – 2007. – № 5. – С. 52–61.

7. Крутько П. Д. Обратные задачи динамики в теории автоматического управления. Цикл лекций. Учебное пособие для вузов. – М.: Машиностроение, 2004. – 576 с.

8. Лурье А. И. Аналитическая механика. – М.: ГИФМЛ, 1961. – 824 с.

9. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. – М.: Наука, 1976.

Рецензенты:

Звездина Марина Юрьевна, доктор физико-математических наук, доцент, заведующая кафедрой «Радиоэлектроника», Минобрнауки России, Ростовский технологический институт сервиса и туризма (филиал) Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Южно-Российский государственный университет экономики и сервиса», г. Ростов-на-Дону.

Риполь-Сарагосси Татьяна Леонидовна, доктор технических наук, профессор, заместитель директора по дополнительному образованию, Минобрнауки России, Филиал государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования

«Московский государственный университет технологий и управления» в г. Ростове-на-Дону, г. Ростов-на-Дону.