УДК 62-50: 531.8

МЕТОД ОБЪЕДИНЕННОГО ПРИНЦИПА МАКСИМУМА В ЗАДАЧЕ СИНТЕЗА УПРАВЛЕНИЙ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМОЙ В ПОЛОЖЕНИИ НЕУСТОЙЧИВОГО РАВНОВЕСИЯ

Андрашитов Д. С.[1], Гежа С. В.[1], Костоглотов А. А.[2], Костоглотов А. И.[3]

[1]*Минобрнауки России, Федеральное государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования Военная академия РВСН имени Петра, проезд Китайгородский, 9, e-mail: dima-andrahitov@rambler.ru, gesser.83@mfil.ru*
[2]*Минобрнауки России, Ростовский технологический институт сервиса и туризма (филиал) Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Южно-Российский государственный университет экономики и сервиса», 344016, г. Ростов-на-Дону, ул. Варфоломеева, 215, e-mail: kostoglotov@aaanet.ru*
[3]*Минобрнауки России, Ростовский государственный институт путей сообщения, 344038, г. Ростов-на-Дону, ул. Шеболдаева, 2, e-mail: kostoglotovai@gmail.com*

Актуальной проблемой в настоящее время является решение задачи синтеза оптимального управления при неустойчивом состоянии динамической системы. Получено ее новое решение на основе использования методологии объединенного принципа максимума (ОПМ). Он выражается в достижении функцией обобщенной мощности максимального значения на оптимальных управлениях. Конструктивность подхода подтверждается результатами решения задачи синтеза управления двухзвенным маятником в положении неустойчивого равновесия. Использование предлагаемой методологии отличается простотой и универсальностью применения, так как подход справедлив для любых динамических систем, удовлетворяющих принципу Гамильтона–Остроградского. Полученные решения демонстрируют связь между ОПМ и принципом максимума Л. С. Понтрягина. Результаты математического моделирования показывают, что синтезированные управления обеспечивают статическую уравновешенность внешних опрокидывающих и управляющих сил. Это трудно осуществить получившим распространение релейным управлением.

Ключевые слова: оптимальное управление, нелинейные модели, синтезирующая функция, фазовая траектория.

METHOD OF THE COMBINED-MAXIMUM PRINCIPLE IN A PROBLEM OF SYNTHESIS OF MANAGEMENTS OF NONLINEAR SYSTEM IN POSITION OF UNSTABLE BALANCE

Andrahitov D. S.[1], Gega S. V.[1], Kostoglotov A. A.[2], Kostoglotov A. I.[3]

[1] *Minobrnauki Russia's Federal State Educational Institution of Higher Professional Education Military Academy RVSN named Peter, travel Kitaigorodsky 9, e-mail: dima-andrahitov@rambler.ru, gesser.83@mfil.ru*
[2] *Minobrnauki Russia, Rostov Institute of Technology Service and Tourism (branch) of Federal State Institution of Higher Professional Education "South-Russian State University of Economics and Service", 344016, Rostov-on-Don, st. Varfolomeeva 215, e-mail: kostoglotov@aaanet.ru*
[3] *Minobrnauki Russia, Rostov State University of Railways, 344038, Rostov-on-Don, st. Sheboldaeva 2, e-mail: kostoglotovai@gmail.com*

Actual problem now is the solution of a problem of synthesis of optimum control at an unstable condition of dynamic system. Its new decision on the basis of use of methodology of the combined-maximum principle (CMP) is received. It is expressed in achievement by function of the generalized capacity of the maximum value on optimum managements. Constructibility of an approach proves to be true results of the solution of a problem of synthesis of management of a dvukhzvenny pendulum in position of unstable balance. Use of offered methodology differs simplicity and universality of application as the approach is fair for any dynamic systems, satisfying to a principle Hamilton-Ostrogradsky. The received decisions show communication between CMP and a principle of a maximum of Pontryagin. Results of mathematical modeling show that the synthesized managements provide static steadiness of external overturning and operating forces. It is difficult for carrying out the extended relay management.

Keywords: optimal control, nonlinear models, the synthesis function, the phase trajectory.

Введение

Задачи синтеза управляющих воздействий в неуравновешенном конечном состоянии исследовались многими авторами [2–5], что объясняется развитием вычислительных и измерительных средств контроля и управления техническими объектами. При этом в качестве исследуемой модели выступал математический маятник, в определенной мере отражающий разнообразные механические системы – от ориентации космических аппаратов до поведения различных манипуляционных роботов.

Известно большое число методов, обеспечивающих получение оригинальных алгоритмов управления, как правило, использующих допущения о величине отклонения от положения равновесия и форме математической модели системы управления [3 – 5, 15]. В частности, применение идеи декомпозиции приводит к управлениям близким к оптимальным, если величины возмущений и нелинейностей в системе оказываются малыми [15].

Синтез управления нелинейной динамической системой может быть осуществлен на основе результатов предложенных в [14] или в [11], которые получены с привлечением концепции обратных задач динамики. Однако в первом случае обратная связь определена с точностью до неизвестной функции, что ограничивает практическую возможность её использования. Во втором получается динамическая система, чьи характеристики «почти идентичны динамическим характеристикам эталонных моделей» [11]. Таким образом, проблема управления нелинейными неустойчивыми динамическими системами остается актуальной.

В данной работе предлагается универсальный подход к синтезу оптимальных управлений нелинейной динамической системой, базирующийся на теории объединенного принципа максимума [1, 7 – 10]. Полученные решения демонстрируют нетривиальную связь между методом ОПМ и принципом максимума Л. С. Понтрягина [13]. Результаты математического моделирования показывают, что в положениях неустойчивого равновесия он обеспечивает статическую уравновешенность внешних опрокидывающих и управляющих сил, что трудно осуществить получившим распространение релейным управлением [6, 15].

1. Метод объединенного принципа максимума. Движение управляемой системы подчиняется принципу Гамильтона – Остроградского на конечном промежутке времени $t \in [t_0, t_k]$ [2]

$$\delta' R = \int_{t_0}^{t_k} (\delta T + \delta' A) dt = 0 , \tag{1}$$

$$t = t_0,\ q(t_0) = q_0;\ \dot{q}(t_0) = \dot{q}_0; \qquad t = t_k,\ q(t_k) = q_k;\ \dot{q}(t_k) = \dot{q}_k;$$

мерой качества управляемого процесса выбран целевой функционал

$$J_1 = \int_{t_0}^{t_k} F(q,\dot{q},u,t)dt \to \min\,, \qquad (2)$$

где $q \in [q_1,...,q_n]$; $\dot{q} \in [\dot{q}_1,...,\dot{q}_n]$ – обобщенные координаты и скорости; $F(q,\dot{q},u,t)$ – определенно-положительная функция; $T = \frac{1}{2}\sum_{s,k=1}^{n} a_{sk}\dot{q}_s\dot{q}_k$ – кинетическая энергия; $\delta' A = \sum_{s=1}^{n} Q_s \delta q_s$ – элементарная работа обобщенных сил, зависящих от управлений, $Q_s = Q_s(q,\dot{q},u,t)$; $u = \{u_j\} \in \overline{G_u}$; $s = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,m}$. Управления выбираются из некоторой замкнутой области $\overline{G_u}$, m – число искомых параметров управления. В качестве функций управления может назначаться и обобщенная сила $Q \in \overline{G_Q}$.

Из принципа (1) следуют уравнения Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial T}{\partial q_s} = Q_s, \quad s = \overline{1,n}\,. \qquad (3)$$

Задача состоит в построении таких допустимых управлений $u \in \overline{G_u}$ или $Q \in \overline{G_Q}$, которые переводят систему (3) из начального состояния $t = t_0$ в конечное $t = t_k$, а целевой функционал (2) принимает при этом минимальное значение.

Условие ОПМ является результатом поиска условия минимума расширенного целевого функционала [1, 6 – 10]

$$J = \int_{t_0}^{t_k} [\lambda(T + A) + F]dt\,, \qquad (4)$$

где λ – неопределенный множитель Лагранжа.

Теорема. Для того чтобы обобщенная сила $Q(q,\dot{q},u,t) \in \overline{G_Q}$ и соответствующая ей траектория $(q,\dot{q}) \in R^{2n}$ доставляли минимум расширенному функционалу (2.4), необходимо выполнить условия максимума для обобщенной мощности

$$\Phi(q,\dot{q},Q,\lambda) = \max_{Q \in \overline{G_Q}} \sum_{s=1}^{n} [\lambda Q_s(q,\dot{q},u) + V_s]\dot{q}_s\,, \qquad (5)$$

при этом $\lambda = const > 0$, а на концах траектории $t = t_0$, $t = t_k$ выполняются условия трансверсальности для функции Гамильтона – Остроградского и обобщенного кинетического потенциала

$$H = \lambda(T + A) + F = 0\,; \qquad (6)$$

$$L = \lambda(T - A) + F = 0, \qquad (7)$$

где $V_s = \dfrac{\partial F}{\partial q_s}$ – фиктивная обобщенная сила, зависящая от формы задания целевого функционала. Ее доказательство приведено в [10].

Из (5) следует, что значения $u \in \overline{G_u}$, соответствующие минимуму (2), определяются выражением

$$u_s = \lambda^{-1}[\mu_s(q,\dot{q})\dot{q}_s - V_s] = 0, \quad s = \overline{1,n}, \qquad (8)$$

где $\mu_s(q,\dot{q})$ – синтезирующая функция. Она определяется из анализа условия трансверсальности (6) на поверхности переключения управления (8) [1, 9]. Тогда для кусочно-постоянных управлений справедливо:

$$u_s(q,\dot{q},t) = U_s sign\left(-\frac{\dot{\varphi}_s|\dot{\varphi}_s|D}{\varepsilon_s} - V_s\right), \quad s = \overline{1,n}, \qquad (9)$$

или в форме принципа максимума Л. С. Понтрягина:

$$u_s(q,\dot{q},t) = U_s sign\left(-\frac{p_s|\dot{\varphi}_s|}{2U_s\lambda^{-1}} - V_s\right), \; s = 1,2, \qquad (10)$$

а для кусочно-непрерывных управлений:

$$u_s(q,\dot{q},t) = \lambda^{-1}\left(-\frac{\dot{\varphi}_s|\dot{\varphi}_s|D}{L_s|V_s|} - V_s\right) \in \overline{G_u}, \; s = 1,2, \qquad (11)$$

где ε_s – независимые множители Лагранжа, D – константа, определяющая диаметр эллипса в фазовом пространстве, L_s – константа, зависящая от формы линии переключения, U_s – допустимое управление [9]. Таким образом, в классе кусочно-постоянных функций решения ОПМ и принципа максимума Л. С. Понтрягина совпадают.

2. Синтез управления нелинейной системой в положении неустойчивого равновесия. Рассматривается двойной маятник. Уравнения Лагранжа второго рода (3) принимают следующий вид:

$$\begin{aligned}
&(I_1 + m_2 l_1^2)\ddot{\varphi}_1 + 0.5 m_2 l_1 l_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)\ddot{\varphi}_2 - \\
&\quad - 0.5 m_2 l_1 l_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1)\dot{\varphi}_2^2 + g l_1 (0.5 m_1 + m_2)\sin\varphi_1 = u_1; \\
&0.5 m_2 l_1 l_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)\ddot{\varphi}_1 + I_2 \ddot{\varphi}_2 + \\
&\quad + 0.5 m_2 l_1 l_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1)\dot{\varphi}_1^2 + 0.5 g l_2 m_2 \sin\varphi_2 = u_2;
\end{aligned} \qquad (12)$$

где I_1 и I_2 – моменты инерции стержней *OA* и *AB* относительно осей, перпендикулярных плоскости *Oxy* и проходящих через шарниры *O* и *A* (рисунок 1); m_1, m_2 – их массы, а l_1 и l_2

– длины; φ_1, φ_2 – углы отклонения стержней OA и AB от вертикали; g – ускорение свободного падения.

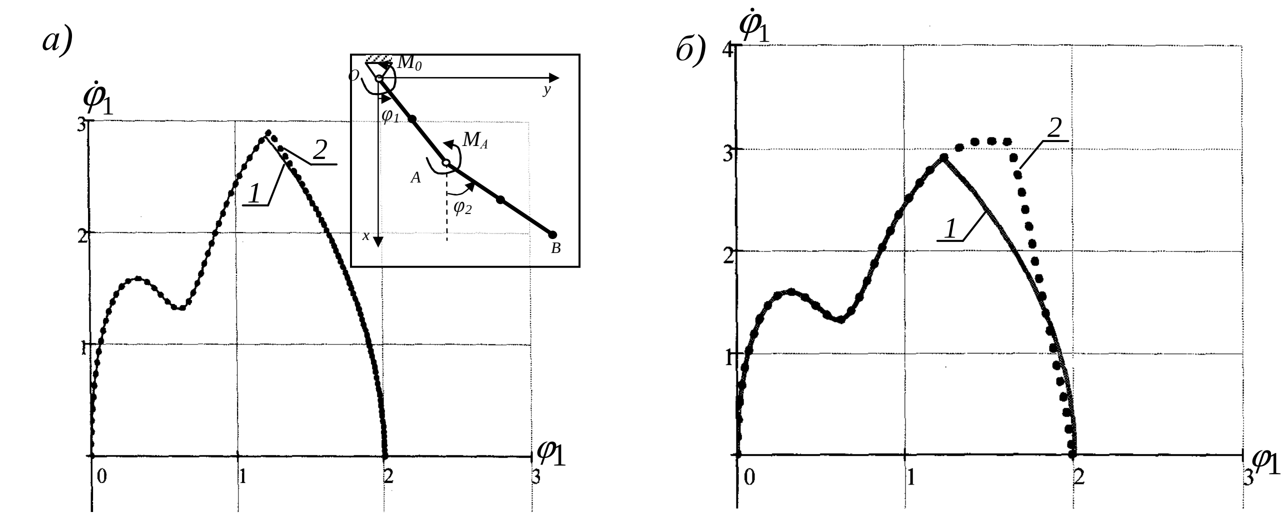
Ставится задача: перевести динамическую систему (12) из произвольного начального положения $t = 0,\ \ \varphi_s(0) = \dot{\varphi}_s(0) = 0,$ в произвольное неуравновешенное состояние $t = t_k,\ \ \varphi_s(t_k) = 2,\ \dot{\varphi}_s(t_k) = 0$ и удерживать ее там, если заданы ограничения на управления: $\overline{G}_u : u_s(q, \dot{q}, t) \in [-U_s, U_s], U_s = 100, s = 1{,}2$.

Выбрана следующая форма целевого функционала (2):

$$J = 0.5\int_0^{t_k}\left([\varphi_1 - \varphi_1(t_k)]^2 + [\varphi_2 - \varphi_2(t_k)]^2\right)dt \to \min . \qquad (13)$$

Оптимальные решения для кусочно-постоянных и кусочно-непрерывных управлений получены с использованием формул (9), (10), (11), в которых для (9) оптимальными являются параметры: $\varepsilon_1 = 380;\ \varepsilon_2 = 144$, $D = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, $a_{11} = I_1 + m_2 l_1^2$, $a_{12} = a_{21} = a\cos(\varphi_1 - \varphi_2)$, $a_{22} = I_2$; $a = 0.5 m_2 l_1 l_2$, $b_1 = g l_1(0.5 m_1 + m_2)$, $b_2 = 0.5 g l_2 m_2$; для (10): $\lambda^{-1} = 0.9$, $p_s = \sum_k a_{sk}\,\dot{q}_k$; $s, k = 1{,}2$; для (11): $L_1 = 2200$, $L_2 = 1150$, $\lambda^{-1} = 6000$.

Результаты математического моделирования представлены на рисунке 1; расчетные значения целевого функционала (13) следующие: для (9) $J = 2.069$; для (10) $J = 2.068$; а для (11) $J = 2.000$.



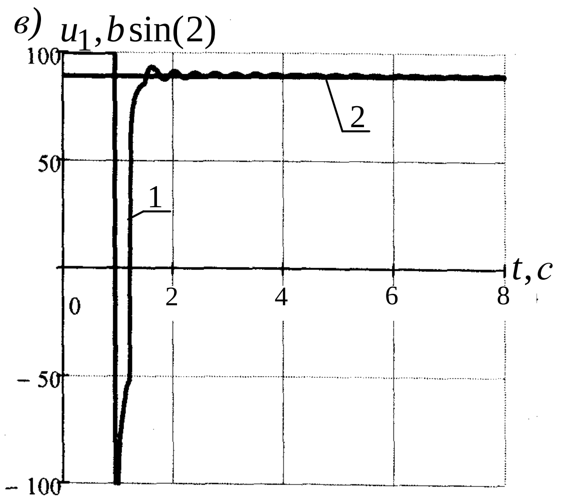


Рис. 1

На рисунке 1 а) цифрами обозначено: 1 – фазовый портрет для (9); 2 – фазовый портрет для (10). На рисунке 1 б) цифрами обозначено: 1 – фазовый портрет для (9); 2 – фазовый портрет для (11). На рисунке 1 в) показана сходимость управлений к точным значениям опрокидывающих сил, где цифрами обозначено: 1 – управление, 2 – опрокидывающая сила.

Результаты математического моделирования показывают, что синтезированные управления обеспечивают статическую уравновешенность внешних опрокидывающих и управляющих сил [14].

Выводы

Новый метод синтеза оптимального управления – объединенный принцип максимума – обладает универсальностью и простотой применения в сравнении с методом Л. С. Понтрягина, который предполагает поиск и анализ решения краевой задачи с целью определения явной формы обратной связи, что во многих практически важных случаях не может быть реализовано. Универсальность метода определяется возможностью использования аналитической формы выражения оптимального управления при решении задачи синтеза для любых динамических систем, удовлетворяющих принципу Гамильтона – Остроградского и записанных в виде дифференциальных уравнений Лагранжа второго рода.

Синтезированные управления обеспечивают высокую эффективность решения классической тестовой задачи механики и теории управления, которая понимается в смысле простоты полученных аналитических выражений, небольшого объема вычислительных затрат.

Исследование проведено при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации, соглашение 14B37.21.2067

Список литературы

1. Андрашитов Д. С., Костоглотов А. А., Костоглотов А. И., Лазаренко С. В. Многопараметрическая идентификация конструктивных параметров методом объединенного принципа максимума // Информационный вестник дона – 2011: http://www.ivdon.ru/magazine/latest/n1y2011/page/2/.
2. Голубев Ю. Ф. Оптимальное по быстродействию управление перемещением неустойчивого стержня // Изв. РАН. Теория и системы управления. – 2008. – № 5. – С. 42 - 50.
3. Гришин А. А., Ленский А. В., Охоцимский Д. Е., Панин Д. А., Формальский А. М. О синтезе управления неустойчивым объектом. Перевернутый маятник // Изв. РАН. Теория и системы управления. – 2002. – № 5. – С. 14 - 24.
4. Колесников А. А., Медведев М. Ю. Современные методы синтеза систем управления: Учеб. пособие. – Таганрог: Изд-во ТРТУ, 2003. – 128 с.
5. Колесников Ал. А. Метод синергетического синтеза системы управления «перевернутого маятника на подвижной тележке» // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2011. – № 6. – С. 110 – 117.
6. Костоглотов А. А., Костоглотов А. И., Лазаренко С. В. Объединенный принцип максимума в задаче синтеза оптимального управления нелинейными системами // Автоматика и вычислительная техника. – 2007. – № 5. – С. 52-61.
7. Костоглотов А. А., Костоглотов А. И., Лазаренко С. В. Синтез оптимальных по быстродействию систем на основе объединенного принципа максимума // Информационно-измерительные и управляющие системы. – 2007. – №12. – С. 34-40.
8. Костоглотов А. А., Костоглотов А. И., Лазаренко С. В. Объединенный принцип максимума в задачах оценки параметров движения маневрирующего летательного аппарата // Радиотехника и электроника. – 2009. – Т. 54, №4. – С. 450-457.
9. Костоглотов А. А., Костоглотов А. И., Лазаренко С. В. Объединенный принцип максимума в информационных технологиях анализа и синтеза. – Ростов-на-Дону: РАСЮРГУЭС, 2010. – 165 с.
10. Костоглотов А. А., Костоглотов А. И., Лазаренко С. В., Шевцова Л. А. Синтез оптимального управления на основе объединенного принципа максимума // Известия

высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Технические науки. – 2010. – № 2. – С. 31 - 37.

11. Крутько П. Д. Обратные задачи динамики в теории автоматического управления. Цикл лекций: Учеб. пособие для ВУЗов. – М.: Машиностроение, 2004. – 576 с.

12. Лурье А. И. Аналитическая механика. – М.: ГИФМЛ, 1961. – 824 с.

13. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. – М.: Наука, 1976. – 393 с.

14. Пятницкий Е. С. Принцип декомпозиции в управлении механическими системами // Доклады Академии наук СССР. – 1988. – Т. 300, № 2. – С. 300 – 303.

15. Решмин С. А., Черноусько Ф. Л. Оптимальное по быстродействию управление перевернутым маятником в форме синтеза // Изв. РАН. Теория и системы управления. – 2006. – № 3. – С. 51 - 62.

Рецензенты:

Звездина Марина Юрьевна, доктор физико-математических наук, доцент, заведующая кафедрой "Радиоэлектроника", Минобрнауки России, Ростовский технологический институт сервиса и туризма (филиал) Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Южно-Российский государственный университет экономики и сервиса», г. Ростов-на-Дону.

Риполь-Сарагосси Татьяна Леонидовна, доктор технических наук, профессор, заместитель директора по дополнительному образованию, Минобрнауки России, Филиал государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования "Московский государственный университет технологий и управления", г. Ростов-на-Дону.