УДК 628.517, 519.653

К ВОПРОСУ ОБ УТОЧНЕНИИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ МЕТОДОМ ДИНАМИЧЕСКОЙ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ

Вдовин А.Ю., Куцубина Н.В., Рублева С.С., Санников А.А.

ФГБОУ ВПО «Уральский государственный лесотехнический университет», Екатеринбург, Россия (*620100, Свердловская область, г. Екатеринбург, Сибирский тракт, д. 37*), *e-mail: rublevas@mail.ru*

При построении математических моделей реально протекающих процессов часто возникает необходимость выяснения природы неизвестных воздействий на исследуемую систему по результатам обработки наблюдений ее измеряемых характеристик. Такие задачи относятся к классу обратных задач динамики управляемых систем. В статье с помощью метода динамической регуляризации определяется характер воздействия неупругих сил на примере системы, рассматриваемой при решении задачи виброзащиты при проектировании и эксплуатации технологических машин и оборудования лесного комплекса. Математическая модель этой динамической системы описывается квазилинейной относительно воздействия системой обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Результаты моделирования процесса показывают возможность описания неизвестных сил, в отличие от первоначального предположения, с помощью функций, имеющих существенно нелинейный характер.

Ключевые слова: задачи виброзащиты, машины и оборудование лесного комплекса, математическое моделирование, динамическая регуляризация.

TO THE QUESTION OF CLARIFICATION MATHEMATICAL MODELS OF MECHANICAL SYSTEM BY THE METHOD OF DYNAMICAL REGULARIZATION

Vdovin A.Y., Kutsubina N.V., Rubleva S.S., Sannikov A.A.

The Ural State Forest Engineering University, Ekaterinburg, Russia (*620100, Sverdlovsk region, Yekaterinburg, Siberian highway, 37*), *e-mail: rublevas@mail.ru*

In constructing mathematical models of real processes often need clarifying the nature of the unknown effects on the system under study as a result of observations of its measured characteristics. Such problems are belong to the class of inverse problems of dynamics of control systems. In this paper by means of method of dynamic regularization the nature of inelastic forces is determined by the example of system considered in solving the problem of vibration protection for the design and operation of process machinery and equipment forestry complex. Mathematical model of the dynamic system is described by a quasi-linear with respect to the impact of the system of ordinary differential equations of second order.The results of design of process show possibility of description of unknown forces, unlike primary supposition, by means of functions, having nonlinear character substantially.

Key words: problem of vibration protection, machinery and equipment of forest complex mathematical modeling, dynamic regularization.

Для решения задач виброзащиты при проектировании и эксплуатации технологических машин и оборудования лесного комплекса существенным является построение математических моделей, отражающих зависимости параметров вибрации конструкций. В [4] рассматривается моделирование вибрации механической системы на примере массы фундамента, совершающей поступательные и поворотные перемещения в одной плоскости под воздействием установленного на ней однороторного машинного агрегата (рис. 1).

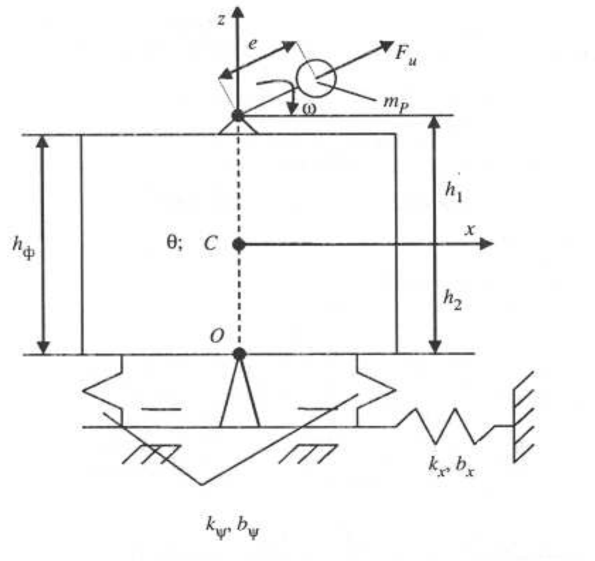


Рис. 1.

Система дифференциальных уравнений колебаний массы фундамента имеет вид:

$$\begin{gathered}\ddot{x}+\left(\frac{\omega_{Ox}}{\kappa_{xp}}\right)\left(\dot{x}-h_1\dot{\psi}\right)+\omega_{Ox}^2\left(x-h_1\psi\right)=v_z\omega^2 h_2\sin\omega t,\\ \ddot{\psi}+\left(\frac{\omega_{O\psi}}{\kappa_{\psi p}}\right)\dot{\psi}+\left(\frac{\omega_{Ox}}{r^2\kappa_{xp}}\right)h_1\left(\dot{x}-h_1\dot{\psi}\right)+\omega_{O\psi}^2\psi-\left(\frac{\omega_{Ox}}{r^2}\right)h_1\left(x-h_1\psi\right)=\left(\frac{v_z}{r^2}\right)h_2\sin\omega t,\end{gathered}\tag{1}$$

здесь ω – частота вращения ротора, x – горизонтальное перемещение центра массы, ψ – поворотное перемещение массы, h_1 – расстояние по вертикали от центра масс установки до оси вращения ротора, h_2 – расстояние по вертикали от центра масс до центра тяжести опоры, r – радиус инерции массы фундамента, v_z – коэффициент, характеризующий меру уровня возбуждающих колебания сил инерции неуравновешенных масс ротора, $\omega_{Ox}, \omega_{O\psi}$ – собственные частоты парциальных колебаний фундамента: горизонтальных и поворотных, κ_{xp}, $\kappa_{\psi p}$ – коэффициенты, соответствующие резонансу.

При разработке средств виброзащиты технологических машин одной из проблем математического моделирования является определение характера сил, воздействующих на фундамент при работе ротора, по измерениям наблюдаемых $x(\cdot), \psi(\cdot),$ а также их скоростей $\dot{x}(\cdot), \dot{\psi}(\cdot).$ Упомянутые силы зависят от характеристики грунтов, влажности и, в конечном счете, от времени. В связи с этим возникает задача определения сил неупругих сопротивлений, зависящих от $\left(\dot{x}-h_1\dot{\psi}\right)$, и возникающих при взаимосвязи фундамента с грунтом. В цитируемой выше работе предполагалось, что указанные силы входят в систему линейно, что позволяло находить решение полученных уравнений в явном виде.

В работах [3; 5] А.В. Кряжимским и Ю.С. Осиповым был предложен метод динамической регуляризации, позволяющий в режиме реального времени моделировать приближение $v_h(t)$ неизвестного воздействия $v_*(t)$ в системе, описываемой обыкновенными дифференциальными уравнениями:

$$\dot{x}(t) = g(t, x(t)) + f(t, x(t))v(t), \quad x(a) = x_0, t \in [a,b], \tag{2}$$

по результатам неточных измерений $x_h(\cdot)$ состояний системы: $|x(t_i) - x_h(t_i)| \le h.$ Здесь $|\cdot|$ – евклидова норма, t_i – узлы разбиения временного промежутка $[a,b]: a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b;$ $t_{i+1} - t_i = \Delta(h);$ $g(\cdot)$ – вектор-функция и $f(\cdot)$ – матрица-функция, отображающие $[a,b] \times R^m$ в R^m и в пространство матриц размерности $m \times q$ соответственно, $v_*(t)$ – функция, обладающая минимальной нормой в $L_2[a,b]$ среди всех $v(t)$, порождающих движение $x(t)$. Считается известным, что $v(\cdot)$ – измеримая функция, со значениями из выпуклого компакта $Q \subset R^q$; отображения $f(\cdot)$ и $g(\cdot)$ удовлетворяют условию Липшица по совокупности переменных.

Упрощенная схема упомянутого алгоритма, а также его модификация и получение соответствующего ей асимптотического порядка точности в случае постоянства подпространства собственных векторов матрицы $f(\cdot) f^T(\cdot)$ рассматривались в [1]. Коротко остановимся на ее описании:

а) до начала работы алгоритма задаются положительные числа h, α=$\alpha(h)$, Δ=$\Delta(h)$, $(b-a)/\Delta \in N$;

б) выбираются узлы t_i ($i \in \overline{0,n}$; t_{i+1} - t_i = Δ) разбиения промежутка $[a,b]$;

в) на каждом шаге алгоритма (на временном промежутке $[t_i, t_{i+1})$) выполняются следующие действия:

1) в момент t_i проводят измерение $x_h(t_i)$ состояния системы $x(t_i)$ так, что $|x_h(t_i) - x(t_i)| \le h$;

2) определяется состояние в моменты t_i системы – модели с начальным условием $w(t_0)$=$x_h(t_0)$, функционирующей на $[t_i, t_{i+1})$ по правилу

$$w(t) = w(t_i) + \left(g(t_i, x_h(t_i)) + f(t_i, x_h(t_i))v_i \right)(t - t_i),$$

где v_i – проекция на Q вектора

$$\frac{1}{\alpha} f^T(t_i, x_h(t_i))(x_h(t_i) - w(t_i)).$$

Таким образом, результатом работы алгоритма является построение приближения воздействия $v_*(t)$ в виде кусочно-постоянной функции $v(t)$=v_i при $t \in [t_i, t_{i+1})$. Если вычисление v_i требует выполнения конечного числа арифметических операций, то при достаточном быстродействии вычислительного устройства формирование приближения $v(t)$ может быть осуществлено в темпе реального времени. Поэтому рассматриваемый метод получил название конечношагового динамического алгоритма (к.д.а).

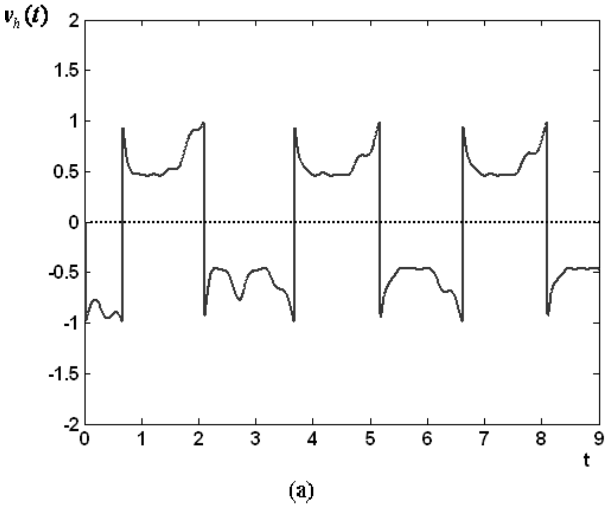
В работе [1] было показано, что при выборе $\Delta=h$, $\alpha = h^{\frac{k+1}{2k+1}}$, и достаточно большом значении $k \in N$, найдется положительная константа C такая, что $\|v_*(\cdot)-v_h(\cdot)\|_{L_1[a,b]} \le C\sqrt{h}$ ($\|\cdot\|_{L_1[a,b]}$ – норма в пространстве $L_1[a,b]$).

Для практических целей зачастую более удобной является возможность получения оценки на неограниченном временном промежутке в равномерной метрике. Такая возможность для рассматриваемого метода была доказана в работе [2].

Отметим, что замена $\dot{x}(\cdot)=y$, $\psi(\cdot)=\varphi$, $v(\cdot)=\dot{x}(\cdot)-h_1\dot{\psi}(\cdot)$ приводит (1) к системе вида

$$\begin{cases} \dot{x}=y, \\ \dot{y}=v_z\omega^2 h_2 \sin\omega t-\omega_{Ox}^2\left(x-h_1\psi\right)-\left(\dfrac{\omega_{Ox}}{\kappa_{xp}}\right)v(t), \\ \dot{\psi}=\varphi, \\ \dot{\varphi}=\left(\dfrac{v_z}{r^2}\right)h_2\sin\omega t-\omega_{O\psi}^2\psi+\left(\dfrac{\omega_{Ox}}{r^2}\right)h_1\left(x-h_1\psi\right)-\left(\dfrac{\omega_{O\psi}}{\kappa_{\psi p}}\right)\varphi-\left(\dfrac{\omega_{Ox}}{r^2\kappa_{xp}}\right)h_1 v(t), \end{cases} \tag{3}$$

которая, очевидно, является частным случаем (2). Метод динамической регуляризации, примененный к (3), позволяет по измерениям $x(\cdot), \psi(\cdot)$ и $\dot{x}(\cdot), \dot{\psi}(\cdot)$ восстановить характер неупругой силы – $v(\cdot)$. Ниже для модельного примера на рисунке 2(а) продемонстрирована зависимость восстановленного с помощью описанного выше метода воздействия $v_h(\cdot)$ от времени t, на рисунке 2(б) – зависимость $v_h(\cdot)$ от $\dot{x}(\cdot)-h_1\ \dot{\psi}(\cdot)$:



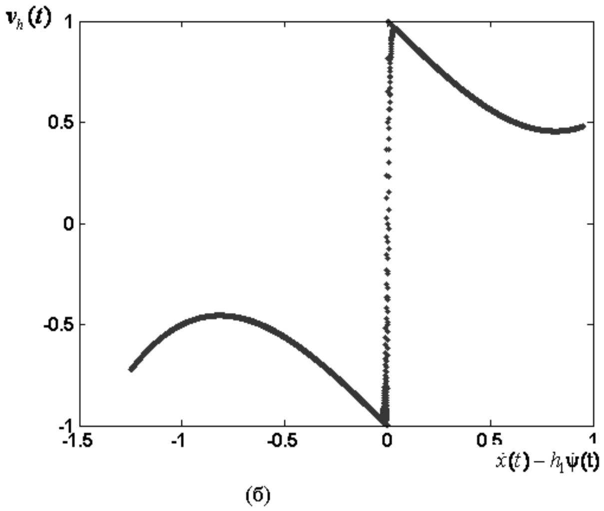


Рис. 2.

Результаты моделирования процесса показывают, что воздействующие силы носят существенно нелинейный характер в отличие от того, как это предполагалось первоначально. Таким образом, метод динамической регуляризации позволяет уточнять рассматриваемые математические модели, что позволяет более адекватно описывать изучаемые процессы.

Список литературы

1. Вдовин А.Ю., Рублева С.С. О точности реконструкции линейного воздействия на динамическую систему по результатам неточных измерений ее состояний // Вестник Московского государственного университета леса – Лесной вестник. – 2008. – № 3(60). – С. 189-191.
2. Вдовин А.Ю., Рублева С.С. Об оценке точности динамического алгоритма восстановления управления на бесконечном временном промежутке // Современные проблемы науки и образования. – 2012. – № 6. – URL: http://www.science-education.ru/106-7408 (дата обращения: 13.11.2012).
3. Кряжимский А.В., Осипов Ю.С. О моделировании управления в динамической системе // Техн. кибернетика. – 1983. – № 2. – С. 51-60 (Изв. АН СССР).
4. Куцубина Н.В., Санников А.А. Виброзащита технологических машин и оборудования лесного комплекса. – Екатеринбург : Урал. гос. лесотехн. ун-т, 2008.
5. Osipov Y.S., Kryazhimskii A.V. Inverse problems for ordinary differential equations: dynamical solutions, London: Gordon and Breach, 1995. – 625 p.

Рецензенты:

Старжинский В.Н., д.т.н., профессор, заведующий кафедрой ФГБОУ ВПО «Уральский государственный университет», г. Екатеринбург.

Часовских В.П., д.т.н., профессор, декан факультета экономики и управления ФГБОУ ВПО «Уральский государственный университет», г. Екатеринбург.