

## ПОСТРОЕНИЕ ПЕРЕДАТОЧНЫХ ФУНКЦИЙ АВТОНОМНЫХ ИНВЕРТОРОВ

Астапович Ю.М., Радионова М.В., Митяшин Н.П.

*ФГБОУ ВПО «Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.», Саратов, Россия (410054, г. Саратов, ул. Политехническая, 77), e-mail: mityashinnp@mail.ru*

Предлагается методика расчета передаточных функций автономных инверторов, предназначенных для использования при аналитическом анализе и синтезе систем автоматического управления преобразовательными комплексами. Методика основана на переходе от исходных дискретных динамических моделей инверторов к непрерывным моделям в форме Коши и последующем переходе к моделям в форме «вход-выход». Переход от дискретной модели к непрерывной основан на формировании такой системы дифференциальных уравнений непрерывной модели, компоненты решения которой являются огибающими для соответствующих компонент решения системы разностных уравнений дискретной модели. Такое формирование достигается с помощью операции матричного логарифмирования, применяемого к матрице коэффициентов системы разностных уравнений дискретной модели, в результате которого рассчитывается матрица коэффициентов системы дифференциальных уравнений непрерывной модели в форме Коши. Расчет логарифма производится с помощью формулы Лагранжа-Сильвестра.

Ключевые слова: преобразователь частоты, инверторы тока и напряжения, передаточная функция, динамическая модель в форме Коши.

## CONSTRUCTION OF THE TRANSFER FUNCTIONS OF THE AUTONOMOUS INVERTERS

Astapovich Y.M., Radionova M.V., Mityashin N.P.

*Saratov state technical university named after Gagarin Y.A., Saratov, Russia (410054, Saratov, street Polytechnical, 77), e-mail: mityashinnp@mail.ru*

The method of calculation of the transfer functions of autonomous inverters for use in the analytical analysis and synthesis of automatic control transducer systems is represented. The technique is based on the transition from the initial discrete dynamical models of inverters to continuous models in the form of Cauchy and subsequent transfer to the models in the form of "input-output". The transition from discrete to continuous models based on the formation of such a system of differential equations of the continuous model, which solution components are envelopes for the corresponded solutions of difference equations of the discrete model. This formation is achieved by the operation of the matrix logarithm applied to the coefficient matrix of the system of difference equations of the discrete model, in which calculated the coefficient matrix of the system of differential equations in the form of a continuous model of Cauchy. Calculation of the matrix logarithm performed using Lagrange – Sylvester formula

Key words: the frequency converter, inverter AC voltage and current, transfer function, a dynamic model in the Cauchy form.

### Введение

В настоящее время находят применение преобразовательные комплексы (ПК), имеющие в своем составе инверторы с разными выходными частотами, оказывающие взаимное влияние по цепям питания постоянным напряжением. Исследование систем управления такими ПК требует наличия динамических моделей инверторов. По своей природе инверторы напряжения и тока являются непрерывно-дискретными звеньями. Наиболее развита теория инверторов как дискретных элементов систем управления. Однако построение динамической модели всего ПК с применением дискретных моделей инверторов затруднительно, что связано с несовпадением частот квантования информации, которые

определяются частотами инвертирования. Ввиду этого целесообразно перейти от дискретных моделей к непрерывным «оггибающим» моделям по описанной ниже методике. В конечном итоге удастся получить передаточные функции инверторов как непрерывных элементов системы автоматического регулирования.

### **Цель исследования**

Разработка методики расчета передаточных функций автономных инверторов как динамических звеньев многочастотных преобразовательных комплексов.

### **Методика исследования**

По своей природе инверторные модули являются дискретно-непрерывными объектами. Их динамические свойства проявляются через средние за интервал между коммутациями вентилей значения токов и напряжений элементов схемы. В то же время динамические модели инверторного модуля являются дискретными, период квантования которых кратен частоте инвертирования. Однако в многочастотном ПК [4] возникают несколько частот квантования. Это существенно усложняет исследование и тем более аналитический синтез системы управления. Выход может быть найден за счёт перехода к непрерывным, «оггибающим» моделям всех инверторных модулей. В результате такого перехода модель всей системы оказывается непрерывной, описывается системой дифференциальных уравнений и может исследоваться методами анализа и синтеза теории непрерывных систем.

Управляющим воздействием для инверторного модуля в рассматриваемом случае является напряжение питания инвертора. Дискретная динамическая модель инвертора имеет вид векторного разностного уравнения [3]:

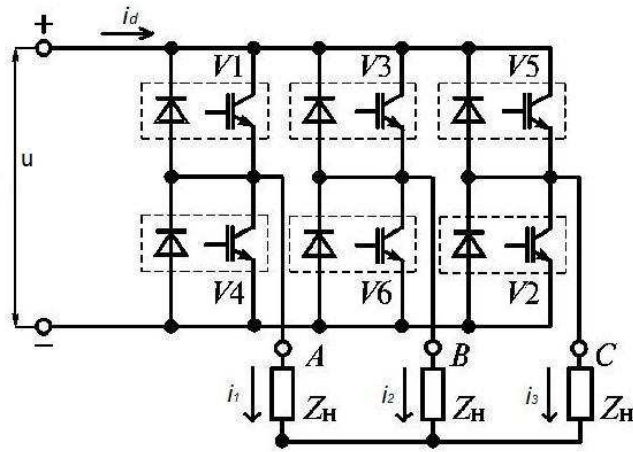
$$\vec{x}_{n+1} = D \vec{x}_n + \vec{d}u_n.$$

Здесь дискретная вектор-функция  $\vec{x}_n$  связана с непрерывной вектор-функцией переменных состояния инвертора  $\vec{x}(t)$  формулой [6]:

$$\vec{x}(n\tau) = K^{n-1} \vec{x}_n,$$

где  $\tau$  – длительность интервала симметрии,  $n$  – номер интервала от начала переходного процесса,  $u_n$  есть значение напряжение на входе инвертора  $u(t)$  на  $n$ -м интервале, а матрица  $K$  имеет индивидуальный вид для каждой схемы инвертора.

В качестве инвертора рассмотрим трехфазный автономный инвертор напряжения с активно-индуктивной нагрузкой  $Z_n$  с параметрами  $R, L$  (рис. 1) [1].



**Рис. 1. Трехфазный автономный инвертор напряжения.**

В этом случае для матриц и векторов имеют место формулы [5]:

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}; \vec{b} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3L} \\ \frac{1}{3L} \end{bmatrix}; \vec{d} = K(e^{A\tau} - E)A^{-1}\vec{b}.$$

Двухмерность пространства состояния ИН объясняется тем, что между фазными токами симметричной нагрузки имеется линейная связь. Для преобразования дискретной динамической модели к огибающей непрерывной модели вводится непрерывная вектор-функция  $y(t)$ , совпадающая в моменты коммутаций с вектором  $\vec{x}_n$ .

Дифференциальное уравнение для огибающего вектора ищется в виде:

$$\dot{y} = Sy + \vec{f}u \quad (1)$$

Параметры непрерывной модели связаны с параметрами дискретной с помощью формул:

$$S = \frac{1}{\tau} \ln(D); \quad \vec{f} = S(D - E)^{-1}(D - K)A^{-1}\vec{b}. \quad (2)$$

где  $\ln(D)$  есть матричный логарифм, который в случае невысокой размерности находится с помощью формулы Лагранжа–Сильвестра. Расчет в данном случае дает следующее значение матрицы непрерывной модели [5]:

$$S = W \begin{bmatrix} \frac{\pi}{3\sqrt{3}\tau} - \frac{R}{L} & \frac{2\pi}{3\sqrt{3}\tau} \\ \frac{2\pi}{3\sqrt{3}\tau} & -\frac{\pi}{3\sqrt{3}\tau} - \frac{R}{L} \end{bmatrix} W^{-1}; \quad (3)$$

где

$$W = \frac{1}{\tau} A^{-1}(e^{A\tau} - E).$$

Наличие динамических моделей инверторных модулей в форме Коши позволяет перейти к модели в форме «вход-выход», что равносильно получению передаточных функций инверторного модуля от всех инерциальных переменных по его входному напряжению. Таким образом, задачей раздела является получение передаточных функций инверторов. Решение этой задачи позволяет исследовать динамику преобразовательных комплексов классическими методами теории автоматического управления.

Будем исходить из модели объекта в пространстве состояний или, в другой терминологии, в форме Коши. Общий вид такой модели:

$$\dot{\vec{y}} = S \vec{y} + B \vec{u}$$

Здесь вектор переменных состояния  $\vec{y}$  имеет размерность  $n$ , вектор управления  $\vec{u}$  –  $m$ , размерности матриц  $S$  и  $B$  равны соответственно  $n \times n$  и  $n \times m$ .

Перейдя к операторной форме, получим:

$$p\vec{y}(p) = S\vec{y}(p) + B\vec{u}(p). \quad (4)$$

Решая это уравнение относительно  $\vec{y}(p)$ , находим:

$$\vec{y}(p) = (S - pE)^{-1} B\vec{u}(p).$$

Итак, для того чтобы получить передаточные функции компонент вектора состояния  $\dot{\vec{y}}$  по компонентам вектора управления  $\vec{u}$ , необходимо обратить матрицу  $S - pE$ , а затем умножить ее на матрицу  $B$  справа. Это означает, что искомые передаточные функции

$W_{ij}(p) = \frac{y_i(p)}{u_j(p)}$  являются элементами матрицы:

$$\hat{W}(p) = (S - pE)^{-1} B = \begin{bmatrix} W_{11}(p) & W_{1j}(p) & W_{1m}(p) \\ W_{i1}(p) & W_{ij}(p) & W_{im}(p) \\ W_{n1}(p) & W_{nj}(p) & W_{nm}(p) \end{bmatrix}.$$

Таким образом, необходимо численным образом обратить матрицу, содержащую параметр  $p$ . Удобным методом обращения такой матрицы является метод интерполяции, описанный в [2] для расчета определителей, содержащих параметр. В данном случае он принимает следующую форму.

Заметим, что матрицу  $(S - pE)^{-1}$  можно формально записать так:

$$(S - pE)^{-1} = \frac{1}{\Delta(p)} X(p), \quad (5)$$

где

$$X(p) = \begin{bmatrix} \Delta_{11}(p) & \Delta_{1j}(p) & \Delta_{1n}(p) \\ \Delta_{i1}(p) & \Delta_{ij}(p) & \Delta_{in}(p) \\ \Delta_{n1}(p) & \Delta_{nj}(p) & \Delta_{nn}(p) \end{bmatrix}.$$

Здесь  $\Delta(p)$  – характеристический многочлен матрицы  $S - pE$ ,  $X(p)$  – союзная матрица, составленная из алгебраических дополнений для соответствующих элементов матрицы, транспонированной к матрице  $S - pE$ .

Характеристический многочлен  $\Delta(p)$  может быть найден любым известным методом, например методом Крылова [2]. Для нахождения элементов  $\Delta_{ij}(p)$ , т.е. алгебраических дополнений элементов  $r_{ji}(p)$  матрицы  $S - pE$ , поступим следующим образом.

Алгебраические дополнения  $\Delta_{ij}(p)$  являются многочленами некоторого порядка  $k$  (обычно  $k=n-1$ ). Допустим, что число  $k$  нам известно. Зададимся произвольными неравными друг другу действительными числами  $p_q$  ( $q=1,2,\dots,k, k+1$ ) и рассчитаем матрицы  $(S - p_q E)^{-1}$ . Эти матрицы являются числовыми и поэтому их можно найти, например, методом Гаусса. Из формулы (5) ясно, что элементами этой матрицы являются числа:

$$g_{ij}(p_q) = \Delta_{ij}(p_q) / \Delta(p_q),$$

откуда

$$\Delta_{ij}(p_q) = g_{ij}(p_q) \Delta(p_q).$$

Теперь для каждой пары  $i, j$  составим сетку

$p_1$	$p_2$	...	$p_q$	...	$p_{k+1}$
$\Delta_{ij}(p_1)$	$\Delta_{ij}(p_2)$	...	$\Delta_{ij}(p_q)$	...	$\Delta_{ij}(p_{k+1})$

По этой сетке находим искомый многочлен  $\Delta_{ij}(p)$ , используя, например, интерполяционный многочлен Ньютона. Поскольку в данном случае интерполируемая функция является многочленом, то она в точности совпадает с  $\Delta_{ij}(p)$ .

Теперь, когда будут найдены все элементы  $\Delta_{ij}(p)$  матрицы  $X(p)$ , для нахождения передаточной матрицы  $\hat{W}(p)$  следует воспользоваться формулой:

$$\hat{W}(p) = \frac{1}{\Delta(p)} X(p) B,$$

которая следует из формулы (5).

При построении передаточной функции трехфазного мостового инвертора напряжения воспользуемся обозначениями:

$$\sigma = \frac{\pi}{3\sqrt{3}\tau}; \quad \rho = s + p.$$

Тогда матрица непрерывной модели (3) примет вид:

$$S = \begin{bmatrix} \sigma - s & 2\sigma \\ -2\sigma & -\sigma - s \end{bmatrix}.$$

Перейдем от системы уравнений огибающей модели

$$\dot{\vec{y}} = S\vec{y} + \vec{f}u$$

к её операторной форме:

$$p\vec{y}(p) = S\vec{y}(p) + \vec{f}u(p).$$

Разрешив операторное уравнение относительно вектора  $\vec{y}(p)$ , получим:

$$\vec{y}(p) = (pE - S)^{-1} \vec{f}u(p)$$

В результате вектор передаточных функций примет вид:

$$\vec{W}(p) = \frac{\vec{y}(p)}{u(p)} = -(S - pE)^{-1} \vec{f}.$$

В данном случае матрицу  $(S - pE)$  легко обратить аналитически. Обозначив  $\rho = s - p$ , получим:

$$(S - pE)^{-1} = \begin{bmatrix} \sigma - \rho & 2\sigma \\ -2\sigma & -\sigma - \rho \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\Delta(p)} \begin{bmatrix} -\sigma - \rho & -2\sigma \\ 2\sigma & \sigma - \rho \end{bmatrix}.$$

Здесь  $\Delta(p)$  – характеристический многочлен матрицы  $(S - pE)$ :

$$\Delta = \rho^2 + 3\sigma = p^2 + 2\frac{R}{L}p + \frac{R^2}{L^2} + \frac{\pi^2}{9\tau^2}$$

Корни этого многочлена имеют вид:

$$p_{1,2} = -\frac{R}{L} \pm j\frac{\pi}{3\tau} = -\frac{R}{L} \pm j\omega.$$

Интерес представляет передаточная функция для входного тока инвертора по напряжению его питания, т.е. первый элемент вектора  $(pE - S)^{-1} \vec{f}$ . В стандартном виде это передаточная функция будет иметь вид:

$$W_u^d(p) = \frac{i_d(p)}{u(p)} = \frac{k_n(T_d p + 1)}{T^2 p^2 + 2T\xi p + 1};$$

Здесь:

$$T = \frac{\tau_i}{\sqrt{1 + \frac{\pi^2 k^2}{9}}}; \quad \xi = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\pi^2 k^2}{9}}};$$

$$T_d = \frac{2s\sigma - 3\sigma - s}{(\sigma + s)(2s\sigma - 3\sigma - s) + 2\sigma(3\varepsilon\sigma - \varepsilon s + 2s)};$$

$$k_n = \frac{(\sigma + s)(2s\sigma - 3\sigma - s) + 2\sigma(3\varepsilon\sigma - \varepsilon s + 2s)}{(1 + \varepsilon^2 - \varepsilon)(s^2 + 3\sigma)}.$$

В качестве другого примера приведем выражение передаточной функции для огибающей входного тока  $i_d$  однофазного АИТ (рис. 2) по входному напряжению инвертора  $u$ .

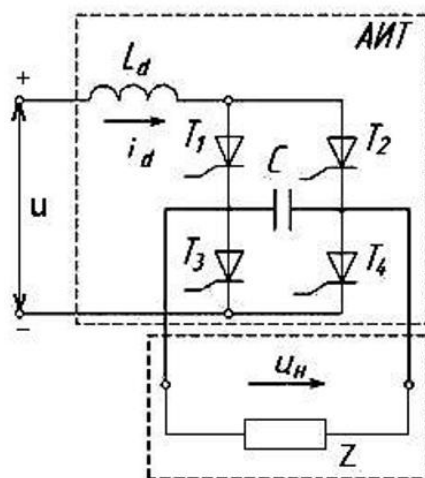


Рис. 2. Однофазный мостовой инвертор тока.

Выражение передаточной функции для огибающей входного тока однофазного АИТ  $i_d$  по входному напряжению  $u$  в общей форме имеет вид:

$$W_{id}(p) = \frac{i_d(p)}{u(p)} = \frac{k(p^2 + b_1 p + b_0)}{p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3}$$

Параметры передаточной функции зависят от параметров схемы и нагрузки. Их зависимости от полного сопротивления нагрузки  $Z$  (при  $\cos \varphi = 0.7$ ) и от  $\cos \varphi$  (при  $Z = 1$  Ом)

приведены в таблицах 1 и 2. Остальные параметры фиксированы: коммутационная емкость  $C=400$  мкФ, частота выходного напряжения 400 Гц, параметры входного реактора:  $L_d=0.01$  Гн,  $R_d=0.01$  Ом.

**Таблица 1 – Зависимость параметров передаточной функции ИТ от сопротивления нагрузки при  $\cos \varphi=0.7$**

Z, Ом	b1, 10 <sup>5</sup>	b2, 10 <sup>8</sup>	a1, 10 <sup>2</sup>	a2, 10 <sup>5</sup>	a3, 10 <sup>8</sup>	k
1	1,601	1,201	24,63	16,75	1,551	0,744
2	2,596	1,569	24,63	17,96	3,071	0,511
3	3,727	2,082	24,63	19,16	4,574	0,455
4	5,017	2,768	24,63	20,36	6,061	0,457
5	6,493	3,662	24,63	21,56	7,533	0,486
7	10,15	6,265	24,63	23,59	10,43	0,601
8	12,44	8,102	24,63	25,14	10,85	0,684
9	15,11	10,041	24,63	26,34	13,26	0,786
10	18,28	13,33	24,63	27,53	14,65	0,91

**Таблица 2 – Зависимость параметров передаточной функции ИТ от  $\cos \varphi$  при  $z=1$  Ом**

cos φ	b1, 10 <sup>4</sup>	b2, 10 <sup>6</sup>	a1, 10 <sup>2</sup>	a2, 10 <sup>5</sup>	a3, 10 <sup>7</sup>	k
0,3	3,628	5,712	7,91	2,615	4,127	0,138
0,4	5,38	16,13	10,97	4,103	5,882	0,274
0,5	7,69	33,52	14,51	6,438	8,075	0,415
0,6	10,94	63,6	18,85	10,2	11,04	0,576
0,7	16,01	102,1	24,63	16,75	15,51	0,774
0,8	25,14	204,5	33,5	30,1	23,56	1,038
0,9	46,64	637,1	51,88	69,66	44,88	14,19

Таким образом, для инвертора, имеющего указанные выше параметры входного реактора инвертора, коммутационной емкости и частоту выходного напряжения и при активно-индуктивной нагрузке  $Z=1$  Ом,  $\cos\varphi=0.7$ , 400 Гц передаточная функция имеет вид:

$$W_{id}(p) = \frac{i_d(p)}{u(p)} = \frac{0.774(p^2 + 1.6 \cdot 10^5 p + 1.2 \cdot 10^8)}{p^3 + 2.46 \cdot 10^3 p^2 + 1.67 \cdot 10^6 p + 1.55 \cdot 10^8}$$

Представляет интерес оценка трудоемкости вычислительных операций, выполнение которых необходимо при построении передаточных функций инверторов. В этой связи



следует отметить, что в вычислительном отношении алгоритм, предлагаемый в настоящей работе, неоднороден. Это значит, что он включает ряд процедур из разных разделов вычислительной математики, которые в существующих стандартных пакетах (Matlab, Mathcad) состыковать в единый вычислительный процесс крайне затруднительно. По этой причине авторами разработана пользовательская программа, реализующая указанный выше алгоритм.

Для более сложных преобразовательных модулей, чем рассмотренные выше, наибольшие вычислительные трудности вызывает расчет матричного логарифма  $\ln(D)$ . Такими модулями, в частности, являются сложные мостовые схемы инверторов тока с расщепленной конденсаторной батареей на выходе. Применение формулы Лагранжа-Сильвестра в этих случаях может приводить к переполнению и потере точности при вычислении высоких степеней матрицы  $D$ , поскольку порядок может быть больше десяти. В этом случае приходится применять приближенный метод, основанный на матричном варианте аппроксимации Паде [7].

### **Заключение**

Научная и практическая новизна работы состоит в разработке методики перехода от исходных дискретных динамических моделей автономных инверторов к непрерывным динамическим моделям в форме Коши и последующем переходе к моделям инверторов в форме «вход-выход» с целью их использования при исследовании динамики многочастотных ПК классическими методами теории автоматического управления. Разработанная методика продемонстрирована на примерах расчета передаточных функций однофазного инвертора тока и трехфазного мостового инвертора напряжения при активно-индуктивной нагрузке.

### **Список литературы**

1. Зиновьев Г.С. Основы силовой электроники. – Новосибирск : НГТУ, 2003. – 664 с.
2. Калиткин Н.Н. Численные методы // Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука». – М., 1978. – 512 с.
3. Миргородская Е.Е., Митяшин Н.П., Радионова М.В. Исследование динамики автономных инверторов корневым методом // Вестник СГТУ. – 2011. – № 4 (62). – Вып. 4. – С. 140-1442.
4. Митяшин Н.П., Миргородская Е.Е., Радионова М.В., Говорухин П.П. Динамика многочастотного преобразовательного комплекса на основе инверторов напряжения // Вестник СГТУ. – 2012. – № 2 (66). – Вып. 2. – С. 119-124.
5. Митяшин Н.П., Томашевский Ю.Б., Радионова М.В. Непрерывная динамическая модель преобразовательного комплекса на основе инвертора напряжения // Вестник СГТУ. – 2011. – № 4 (59). – Вып. 1. – С. 199-203.

6. Нугаев Э.К., Митяшин Н.П., Миргородская Е.Е., Щербаков А.А. Дискретные динамические модели структурно-симметричных инверторов // Управление сложными системами : сб. науч. ст. – Саратов : СГТУ, 2009. – С. 3-9.
7. Nicholas J. Higham. Evaluating Pade approximants of the matrix logarithm // SIAM J. Matrix anal. appl. – 2001. – N 4. – С. 1126-1135.

**Рецензенты:**

Коваль Владимир Александрович, доктор технических наук, профессор кафедры «Техническая кибернетика и информатика», Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А., г. Саратов.

Ивашенко Владимир Андреевич, доктор технических наук, старший научный сотрудник Института проблем точной механики и управления РАН, г. Саратов.