

УДК 674.413.3

## ЛОКАЛЬНО-СРЕДИННЫЙ ИЗГИБ СЛОИСТЫХ КОМПОЗИТНЫХ МАТЕРИАЛОВ ИЗ ТОНКИХ ПЛАСТИН

Коцюба И.В., Ветошкин Ю.И., Петряев Н.Е.

*ГОУ ВПО «Уральский государственный лесотехнический университет», Екатеринбург, Россия (620144, Свердловская обл., г. Екатеринбург, Сибирский тракт, 37), e-mail: [petryaevne@mail.ru](mailto:petryaevne@mail.ru)*

В данной статье представлена математическая модель расчета прочностных характеристик многослойных пластин композиционного материала. Установленные зависимости позволяют объективно оценить оптимальные технологические режимы многослойных пластин при статическом изгибе. Исследована прочность нового конструкционного композитного материала, обладающего анизотропией механических свойств; предлагаемый в настоящей статье математический расчет позволяет предсказать, как будут изменяться характеристики прочности анизотропных древесных материалов. Полученные зависимости можно применять не только при расчете сопротивления на изгиб, но и при растяжении, сжатии, скалывании, смятии на грани максимальных нагрузок, в соответствии с законом Гука, для объяснения вариантов перераспределения напряжений в образцах различной толщины (слоистости) как самого материала, так и в клеевых слоях и шпоне. Перспективы в этом отношении открываются при сочетании многослойной древесины с пластмассами, металлами и другими материалами.

Ключевые слова: композитные материалы, статический изгиб.

## LOCAL-MIDDLE BENDING OF THE LAMINATED COMPOSITE MATERIALS OF THIN PLATES

Kotsyuba I.V., Vetoshkin U.I., Petriaev N.E.

*Ural State Forest Engineering University, Yekaterinburg, Russia (620144, Yekaterinburg, street Siberian tract 37), e-mail: [petryaevne@mail.ru](mailto:petryaevne@mail.ru)*

This article presents a mathematical model of calculation the strength characteristics of the composite laminated plates. The dependence allows to estimate the optimal process conditions of laminated plates in static bending. Investigating the structural strength of the new material that is highly anisotropic mechanical properties, proposed in this article a mathematical calculation, allows us to predict what will change the characteristics of strength of anisotropic wood. Obtained relationships can be applied not only in the calculation of the resistance to bending, but in tension, compression, scaling, crumpled on the verge of loads, according to Hooke's law, to explain the options stress distribution in the samples of different thicknesses (bedding), both the material and in the adhesive layer and veneer. Prospects in this regard are opened with a combination of multi-layered wood with plastics, metals and other materials

Keywords: composite materials, static bending.

Предел прочности при статическом изгибе является одной из важнейших эксплуатационных характеристик слоистых композитных материалов, так как подавляющее число изделий из них испытывает в процессе эксплуатации деформацию статического изгиба и сжатия. При исследовании механических свойств прочностного характера фанеры с наполнителем в клеевом слое ставилась задача нахождения определенной математической модели рассматриваемого материала, основанной на результатах эксплуатационных исследований. Выбор модели позволяет получить объект, поведение которого под нагрузкой можно описать математическим уравнением.

Дифференциальное уравнение в частных производных для прямоугольной пластины, где в качестве переменных обычно берутся значения в прямоугольной системе координат (по X, Y), решается в рядах.

Расчет пластин с прямоугольным очертанием значительно более сложен, чем симметричных круглых пластин. Получается это, прежде всего, потому, что прогибы (перемещения) и напряжения несимметричных пластин определяются в функции не одного, а двух независимых переменных. Если пластина свободно опирается по четырем сторонам и находится под действием распределенной нагрузки  $q$ , то наибольший прогиб имеет место при  $X=Y=0$ , т.е.

$$f_{\max} = \alpha \cdot \frac{q \cdot a^4}{E \cdot h^3} \quad (1.1)$$

где  $\alpha$  – коэффициент, зависящий от отношения  $\frac{a}{b}$ ;

$a$  – меньшая сторона пластины;

$E$  – модуль упругости материала;

$h$  – толщина пластины;

$b$  – ширина пластины.

Эта формула применима и к квадратной пластине со стороной  $a$ .

При расчете за основной силовой фактор взята величина максимального внутреннего изгибающего момента для получения предела прочности и максимального касательного напряжения при разрушении. Наибольшие изгибающие моменты  $M_x$  и  $M_y$  из расчета на единицу длины сосредоточены в одной точке и определяются по формуле:

$$M_{x(\max)} = \beta \cdot q \cdot a^2, \quad M_{y(\max)} = \gamma \cdot q \cdot a^2 \quad (1.2)$$

Коэффициенты  $\beta, \alpha, \gamma$  для некоторых значений  $\frac{b}{a}$  при  $\mu = 0.3$  приведены в таблице 1.

**Таблица 1 – значение коэффициентов  $\beta, \alpha, \gamma$**

$\frac{b}{a}$	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2	3	4	5	$\infty$
$\alpha$	0,0433	0,0616	0,0770	0,0906	0,1017	0,1106	0,1336	0,140	0,1416	0,1422
$\beta$	0,0479	0,0626	0,0753	0,0862	0,0948	0,1017	0,1189	0,123	0,1246	0,1250
$\gamma$	0,0479	0,0501	0,0506	0,0493	0,0479	0,0464	0,0404	0,0384	0,0375	0,0375

Если пластина закреплена по четырем краям, то наибольший прогиб имеет место по-прежнему в центре пластины (1.1).

Наибольший изгибающий момент возникает по серединам больших сторон, т.е. при  $x = \frac{a}{2}$  и  $y = 0$ .

$$M_{x(\max)} = \beta_1 \cdot p \cdot a^2 \quad (1.3)$$

Коэффициенты  $\alpha_1$  и  $\beta_1$  для некоторых значений  $\frac{b}{a}$  при  $\mu = 0.3$  приведены в таблице 2.

Таблица 2 – значение коэффициентов  $\alpha_1$  и  $\beta_1$

$\frac{b}{a}$	1	1,25	1,50	1,75	2	$\infty$
$\alpha_1$	0,0138	0,0199	0,0240	0,0264	0,0277	0,0284
$\beta_1$	0,0513	0,0665	0,0757	0,0817	0,0829	0,0838

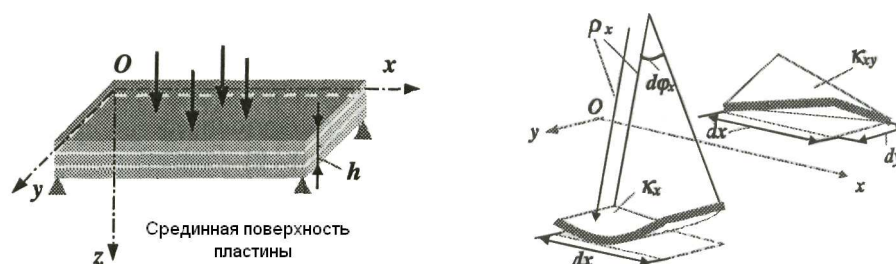


Рис. 1. Силовая схема линейного элемента во время деформации изгиба.

Пластина (пластинка) – тело призматической формы (рис. 1), высота которого  $h$  мала в сравнении с наименьшим характерным размером  $b$ . Если отношение  $\frac{1}{80} \leq \frac{h}{b} \leq \frac{1}{5}$ , но более

$\frac{1}{80} - \frac{1}{100}$ , то пластина называется тонкой пластиной или просто пластиной. Если  $\frac{h}{b} < \frac{1}{80}$ ,

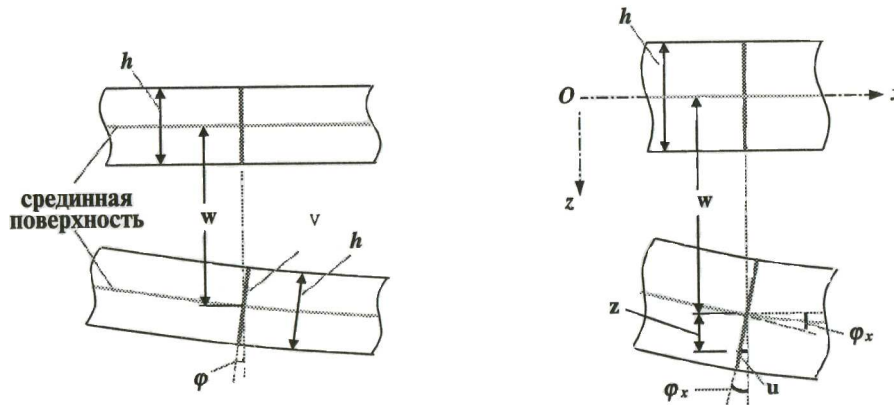
то пластина называется мембранной. Наконец, если  $\frac{h}{b} < \frac{1}{3}$ , то это уже плита. Наиболее

практическое применение имеют слоистые пластины, которые и рассматриваются в настоящей статье, их расчет и испытание на статический изгиб. У тонких пластин  $f \ll h$ .

Плоскость, параллельная основаниям и делящая расстояние между ними пополам, называется срединной. Оси координат  $X$  и  $Y$  будем располагать на срединной плоскости; перемещения вдоль осей  $X$ ,  $Y$  обозначим  $U$ ,  $V$ . Ось  $Z$  показывает направление внешних, поперечных изгибающих нагрузок, а  $f$  – направление прогиба пластины. Координатную систему считать будем неподвижной. В основе теории прогиба пластин лежат следующие гипотезы Кирхгофа:

- 1) срединная плоскость пластины не деформируется, а только искривляется;
- 2) любой линейный элемент, перпендикулярный срединной плоскости, остается ей перпендикулярным и после изгиба, т.е. деформации, причем длина его не изменяется;
- 3) продольные слои пластины не давят друг на друга ( $\sigma_z = 0$ ).

Эти гипотезы очень близки к гипотезам, на которых основывается теория изгиба балок, поэтому напряжения в пластинках распределяются так же, как и в балках при изгибе (рис. 2).



**Рис. 2. Распределение напряжений в пластинке при изгибе.**

$$\sigma_x = \frac{M_x}{I} \cdot z; \quad \sigma_y = \frac{M_y}{I} \cdot z \quad (1.4)$$

$$\tau_{xz} = \frac{Q_z}{2I} \left( \frac{h^2}{4} - z^2 \right); \quad \tau_{yz} = \frac{Q_z}{2I} \left( \frac{h^2}{4} - z^2 \right),$$

где  $\sigma_x$ ;  $\sigma_y$  – нормальные напряжения;

$\tau_{xz}$ ;  $\tau_{yz}$  – касательные напряжения в пластинах;

$I = \frac{h^3}{12}$ ,  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $Q_x$ ,  $Q_y$  – изгибающие моменты и поперечные силы, отнесенные к единице длины пластины. Они определяются, если известна разрушающая функция прогиба  $f = f(x, y)$  из следующих зависимостей:

$$M_x = -D \cdot \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right); \quad M_y = -D \cdot \left( \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)$$

$$Q_x = -D \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 f); \quad Q_y = -D \frac{\partial}{\partial y} (\nabla^2 f), \quad (1.5)$$

где  $D = \frac{E}{1-\mu^2} \cdot \frac{I \cdot h^3}{12}$  – цилиндрическая жесткость пластины,

$E, \mu$  – упругие постоянные материала пластины.

Изгиб пластины сопровождается обычно её кручением с появлением крутящих моментов  $T, T_{xy}$  и вызываемых ими касательных напряжений  $\tau_{xy}$  (рис. 3).

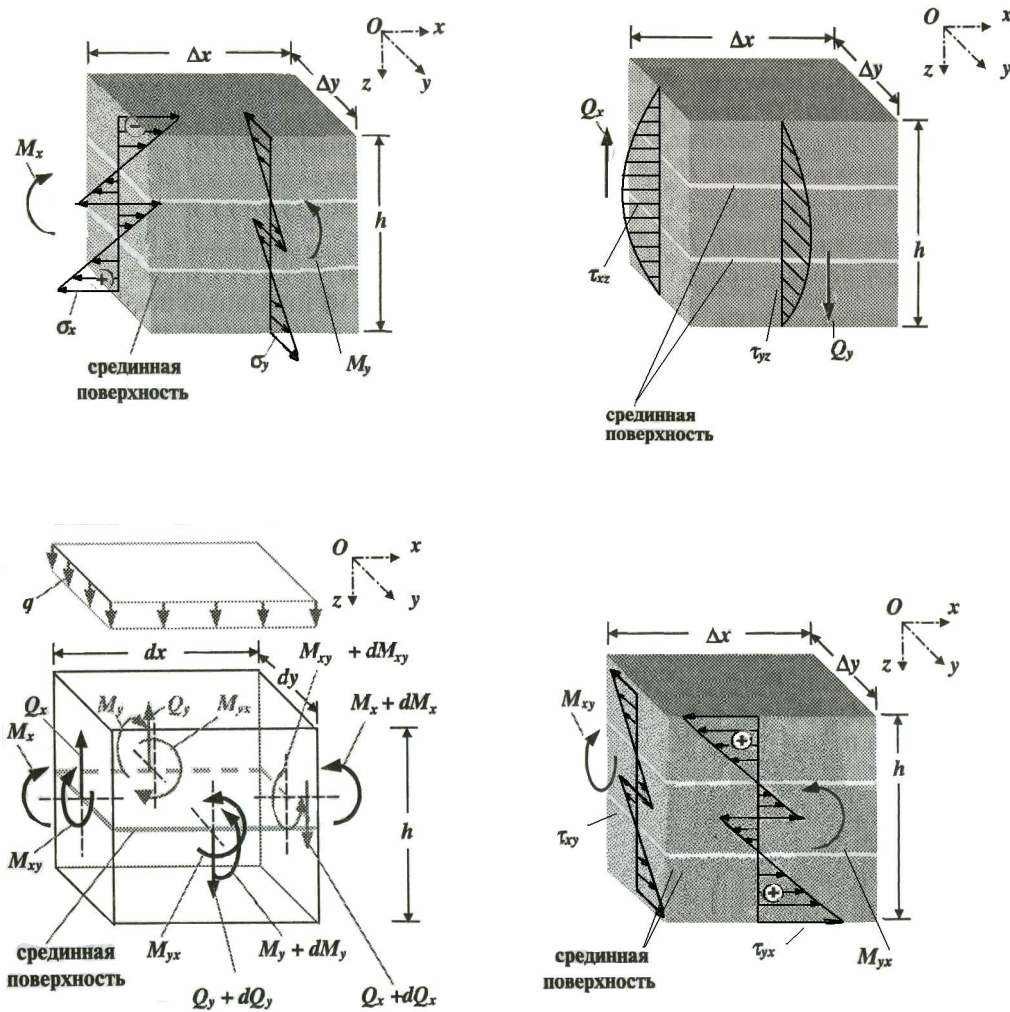


Рис. 3. Деформация в напряженной точке при изгибе пластины, характер изменения напряжений в точке и их эпюры.

$$H = -D(1-\mu) \frac{\partial^2 f}{dx \cdot dy}; \tau_{xy} = \frac{H}{I} z \quad (1.6)$$

Для нахождения функции прогибов  $f$  используют уравнение Софии – Жермен:

$$\nabla^2 \nabla^2 f = \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 f}{\partial y^4} = \frac{1}{D} q(x, y) \quad (1.7)$$

где  $q(x, y)$  – интенсивность распределенной по площади поперечной нагрузки на пластину.

При нахождении интеграла необходимо использовать граничные условия закрепления пластины (рис. 1).

Шарнирно – опорный край (грань СД):  $\omega = 0$ ;  $\frac{d^2 \omega}{dy^2} = 0$ ;

Свободный край (грань ДА);  $M_x = Q_x = H = 0$

$$\frac{d^2 \omega}{dx^2} + \mu \frac{d^2 \omega}{dy^2} = 0;$$
$$\frac{d^3 \omega}{dx^3} + (2 - \mu) \frac{d^3 \omega}{dx dy^2} = 0 \quad (1.8)$$

Математическая модель базировалась на основании статистических исследований слоистого композитного материала. При испытании на статический изгиб ставилась задача в определении предела прочности в зависимости от различных конструктивных особенностей материала. Для этого изменялись соотношения компонентов в клеевом слое и толщина клеевого слоя.

В процессе испытаний на гидравлической машине ГМС–50 создавались условия чистого изгиба в средней зоне согласно схеме, показанной на рис. 1. Скорость нагрузки принималась из расчета соблюдения условий кинетического подобия:  $-7000 \div 1500$  Н/мин.

В результате испытаний получены статистические данные, приведенные в таблице 3. При нагружении образцов на статический изгиб некоторые из них вели себя как упругие, а некоторые как упруго-вязко-пластичные. Поэтому за основу модели слоистого композитного материала «Фенотрен» с наполнителем, как показали результаты анализа предела прочности при изгибе, принята упруго-вязко-пластичная модель тела.

Мгновенная упругая деформация слоистого материала происходила за счет деформации слоя древесины (шпона) и тонкого слоя наполнителя, где скорость изменения деформации соответствовала скорости изменения нагрузки при изгибе, т.е. наблюдалась линейная зависимость. Эластичная деформация, развивающаяся во времени, связана с вязким, все увеличивающимся сопротивлением аморфного слоя наполнителя и перемещением слоя древесины шпона относительно клеевого слоя слоистого материала. Относительные или простейшие деформации, выявленные в процессе испытания образцов, объединяясь, создают зону локальной пластической необратимой деформации, в которой в дальнейшем и наблюдается разрушение. Пластические деформации, так же как и упруго-вязкие, развиваются во времени.

Упругая и упруго-вязкая деформации намного превышают основную [5]. Исключение составляет лишь сжатие, особенно поперек волокон. В данной статье указанная модель

применяется для объяснения вариантов перераспределения напряжений в образцах различной толщины (слоистости), как самого материала, так и клеевых слоев и шпона, возникающих вследствие больших градиентов напряжений в зонах поперечного сечения и жесткости слоев слоистого материала «Фенотрен».

**Вывод:** рассматривая виды (типы) разрушения образцов на статистический изгиб и анализируя статистические данные деформаций, следует заметить и принять, что процесс разрушения происходит фактически путем расслоения по клеевому слою с наполнителем при нагрузках, вызывающих упругие и упруго-пластичные деформации [1–4].

### Список литературы

1. Бойтемиров Ф.А., Головина В.М., Улицкая Э.М. Расчет конструкций из дерева и пластмасс. – М. : Академия, 2006. – 157 с.
2. Мэтьюз Ф., Ролингс Р. Композитные материалы. Механика и технология. – М. : Техносфера, 2004. – 408 с.
3. Соболев Ю.С. Древесина как конструкционный материал. – М. : Лесная промышленность, 1979. – 245 с.
4. Соболев Ю.С. Новый способ испытания древесины при статическом изгибе. – М. : Лесная промышленность, 1977. – 243 с.
5. Фрейдин А.С. Прочность и долговечность клеевых соединений. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Химия, 1981. – 272 с.

### Рецензенты:

Ляпцев Сергей Андреевич, профессор, доктор технических наук, зав. кафедрой технической механики УГГУ, Уральский государственный горный университет, г. Екатеринбург.

Ковалев Р.Н., профессор, доктор технических наук, зав. кафедрой экономики транспорта и логистики УГЛТУ, Уральский государственный лесотехнический университет, г. Екатеринбург.