УДК 372.851

КОМПЬЮТЕРНАЯ ПОДДЕРЖКА РЕШЕНИЯ ШКОЛЬНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ЗАДАЧ СРЕДСТВАМИ GEOGEBRA

Безумова О.Л., Котова С.Н., Шабанова М.В.

ФГАОУ ВПО «Северный (Арктический) федеральный университет имени М.В. Ломоносова», Архангельск, Россия (163002, г. Архангельск, наб. Северной Двины, 17), e-mail: m.shabanova@narfu.ru

В статье представлены и проиллюстрированы примерами возможности интерактивной геометрической среды GeoGebra в поддержке решения уравнений и неравенств. Показано, что применение GeoGebra к решению данного класса задач основано на построении геометрических интерпретаций различных видов. Рассмотрено три метода решения алгебраических задач, использующих эти интерпретации: функционально-графический, геометрический и метод геометрических мест точек. Раскрыты достоинства и недостатки компьютерного решения алгебраических задач, показана связь его с аналитическим решением. Содержание статьи будет полезно разработчиком данного и подобных программных продуктов образовательного назначения, так как раскрывает требования пользователей, указывает на направления корректировки программы. Представленные в статье материалы полезны специалистам в области математического образования, так как демонстрируют новые направления и способы использования интерактивных геометрических сред в учебном процессе.

Ключевые слова: интерактивная геометрическая среда, GeoGebra, геометрическая интерпретация, задачи школьного курса алгебры, компьютерное решение.

COMPUTER DECISION SUPPORT OF SCHOOL ALGEBRAIC PROBLEMS BY MEANS GEOGEBRA

Bezumova O.L., Kotova S.N., Shabanova M.V.

Federal State Autonomous Educational Institution of Higher Professional Education "Northern (Arctic) Federal University named after M.V.Lomonosov", Archangelsk, Russia (163002, Archangelsk, Seafront Northern Dvina, 17), e-mail: m.shabanova@narfu.ru

This paper is presents and illustrats with examples of features of interactive environments GeoGebra to decision support of the equations and inequalities. It is shown that the use of GeoGebra to solve this kind of problems is based on the construction of geometric interpretations. Three methods of using these interpretations is considered such as: functional graphics, geometric and locus of points. The advantages and disadvantages of computer decision of algebraic problems is revealed. The content of the article will be useful for developers of software products, because it reveals the user requirements, indicates the direction of adjustment programs. Material presented in this article will be useful to specialists in the field of mathematics education, because it reveals new directions and methods of use of interactive environments in the training process.

Keywords: interactive geometric environment, GeoGebra, geometric interpretation, school-time algebra problems.

Федеральный государственный образовательный стандарт среднего (полного) общего образования, утвержденный приказом Минобрнауки России от 17 апреля 2012 года № 413, предъявляет к результатам обучения курса алгебры и начал математического анализа новые требования, связанные с овладением приемами использования компьютерных программ для поиска и иллюстрации решения уравнений и неравенств, их систем [5]. Эти новые требования ставят перед методической наукой задачу оценки образовательных возможностей существующих программных продуктов специального назначения, определения их места в системе средств учебной математической деятельности, а также приёмов их использования в содержании обучения алгебре и началам математического анализа.

Одним из эффективных приёмов поиска решения уравнений, неравенств и их систем, по мнению многих методистов [1–3 и др.], является приём геометрических интерпретаций.

Однако в практике обучения алгебре и началам математического анализа он имеет ограниченное применение, связанное с большими затратами учебного времени и технической сложностью построения геометрических интерпретаций алгебраических объектов. Решение этой проблемы мы видим в использовании возможностей интерактивной геометрической среды GeoGebra, так как идейную основу ее создания составляет визуализация связей алгебры и геометрии (**geo**metry +al**gebra**) [4].

К возможностям этой программы относится создание различных типов геометрических интерпретаций, которые позволяют использовать в процессе решения алгебраических задач такие методы, как функционально-графический, геометрический и метод геометрического места точек.

Проиллюстрируем эти возможности GeoGebra конкретными примерами.

Для реализации функционально-графического метода необходимо, как известно, перевести условие алгебраической задачи в термины взаимного расположения графиков элементарных функций. При построении «вручную» желательно выбирать функции так, чтобы общий вид их графиков и свойств были хорошо известными. Использование GeoGebra позволяет не тратить время на подбор функций и исследование их свойств, так как для построения графика функции достаточно вести формулу, её задающую, в строку ввода.

Пример 1. Решить уравнение $\sqrt{x^2-5x\sqrt{2}+25}+\sqrt{x^2-12x\sqrt{2}+144}=13$.

Решение. Введем в рассмотрение функции $f(x)=\sqrt{x^2-5x\sqrt{2}+25}$ и $g(x)=13-\sqrt{x^2-12x\sqrt{2}+144}$. Тогда уравнение примет вид. Используя строку ввода, построим графики функций в GeoGebra. Отмечаем с помощью инструмента «Пересечение двух объектов» точку пересечения графиков. Выведем на экран имя и значение точки, используя вкладку «Свойства». Абсцисса является приближенным значением корня уравнения с выбранной точностью (рис. 1).

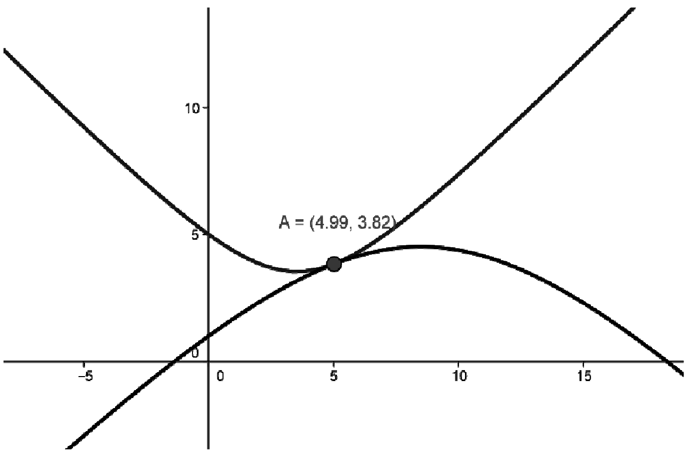

Рис. 1. Геометрическая интерпретация для решения задачи примера 1 функционально-графическим методом, выполненная в GeoGebra.

К помощи метода геометрических мест точек прибегают при решении алгебраических задач, сводящихся к системам (совокупностям) уравнений и неравенств с параметрами или двумя переменными. Применение этого метода вручную требует наличия у учащихся обширных знаний об уравнениях и неравенствах, задающих опорные геометрические места точек, хорошей логической и теоретико-множественной подготовки учащихся, включающей умения находить пересечение или объединения множеств, построенных на координатной плоскости, в соответствии со смыслом логических операций. Использование GeoGebra не требует владения этими знаниями и умениями. Данная среда позволяет получать геометрическую интерпретацию после записи в строке ввода совокупностей (систем) уравнений и неравенств с помощью логических связок.

Пример 2. При каких значениях параметра a все решения неравенства $\frac{x^2+a^2-4}{x-|a|}\le 0$ отрицательны?

Решение. Для использования метода геометрического места точек при решении данного неравенства в ИГС необходимо переименовать переменные *a*, *x* в переменные *x*, *y* соответственно. Получим задачу «найти все значения *x*, при которых решениями неравенства $\frac{y^2+x^2-4}{y-|x|}\le 0$ являются только отрицательные значения *y*».

Используя метод преобразования логической структуры неравенства, получим совокупность $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2+y^2\le 4,\\ y>|x|,\end{cases}\\ \begin{cases}x^2+y^2\ge 4,\\ y<|x|.\end{cases}\end{array}\right.$

Введя в строку ввода ((*x*^2+*y*^2≤4)∧(*y*>abs(*x*)))∨((*x*^2+*y*^2≥4)∧(*y*<abs(*x*))), получим графическое изображение множества решений (рис. 2).

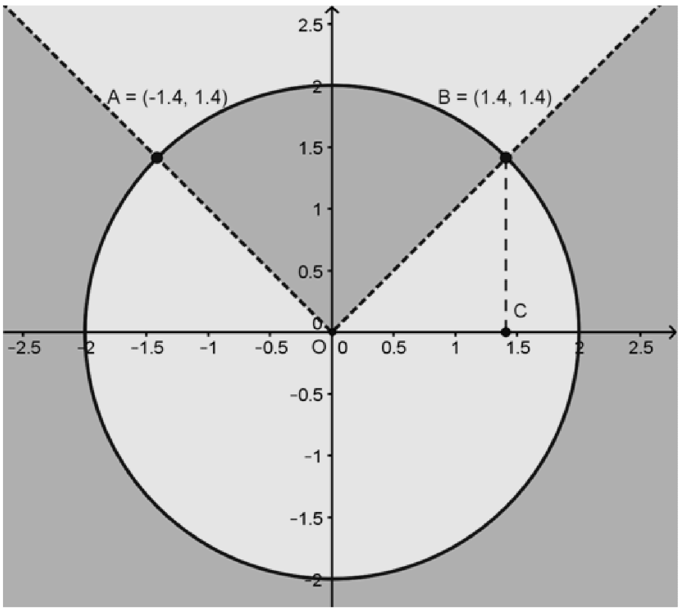

Рис. 2. Геометрическая интерпретация для решения задачи примера 2 методом геометрических мест точек, выполненная в GeoGebra.

Абсциссы точек *A* и *B* являются лишь приближенными значениями искомых значений параметра. Однако полученная геометрическая интерпретация позволяет найти точные значения с опорой на геометрические свойства построенной конфигурации. Рассмотрим треугольник *OBC*. Он является прямоугольным и равнобедренным с гипотенузой, равной радиусу окружности. Следовательно, $x_B = OB = \sqrt{2}$. Тогда $x_A = -\sqrt{2}$. Окончательно получаем $a = \pm\sqrt{2}$.

Для применения геометрического метода к решению алгебраических задач необходимо придать переменным и выражениям, зависящим от них, смысл геометрических величин. Затем построить фигуру, обладающую соответствующими метрическими свойствами. Полученная геометрическая интерпретация позволяет найти значение переменной с использованием знаний о позиционных и метрических свойствах фигуры и её элементов. Очевидным ограничением данного метода является нахождение лишь неотрицательных значений переменной. Построение геометрических фигур в GeoGebra позволяет «считывать» искомое значение с чертежа или находить его экспериментально, используя динамичность изображения.

Решение задачи примера 1 геометрическим методом. Подкоренные выражения слагаемых в левой части уравнения сходны по структуре с теоремой косинусов для треугольников: 1) со сторонами 5, *x* и углом между ними 45°; 2) со сторонами 12, *x* и углом 45°. Тогда, интерпретируя уравнение на языке этих геометрических фигур, получаем, что сумма сторон, лежащих против углов в 45°, равна 13.

С помощью инструмента «Ползунок» в GeoGebra введем параметр *x*, это позволит получить динамический чертеж, состоящий из описанных выше треугольников (рис. 3а, б). Для получения ответа достаточно, меняя положение ползунка, подобрать такое значение x, при котором сумма длин интересующих нас сторон равна 13. Заметим, что при несвязном построении треугольников (рис. 3б) компьютерное решение не помогает обнаружить аналитическое.

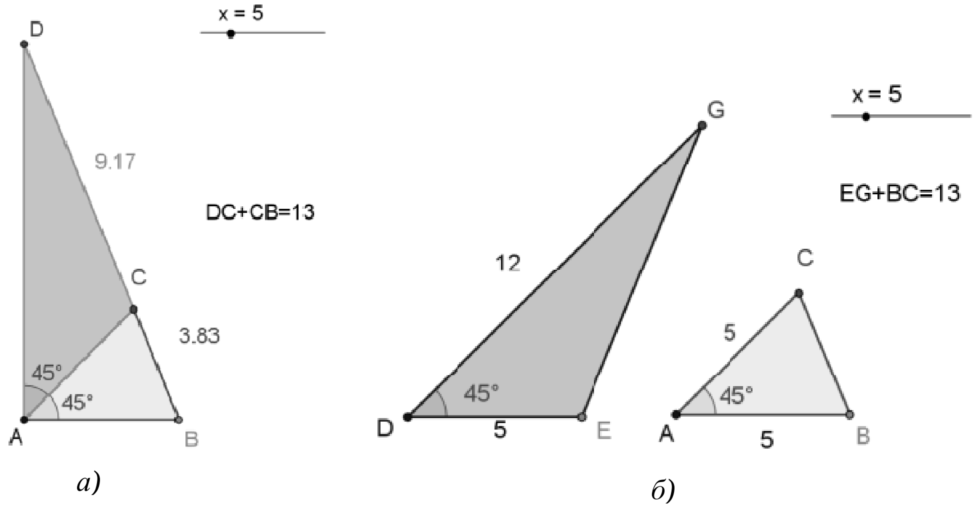

Рис. 3. Геометрическая интерпретация для решения задачи примера 1 геометрическим методом, выполненная в GeoGebra.

Геометрическая интерпретация рисунка 3а позволяет сделать вывод о том, что точка С лежит на гипотенузе *BD* прямоугольного треугольника *ABD*. Рассмотрим треугольник ADC. По теореме синусов $\frac{x}{\sin\angle ADC} = \frac{12}{\sin(45^\circ + \angle ADC)}$. Из треугольника ABD находим $\sin\angle ADC = \frac{5}{13}$. Тогда $x = \frac{60\sqrt{2}}{17}$.

Все представленные в статье примеры компьютерных решений показывают, что возможности интерактивной геометрической среды хоть и велики, но не безграничны. Так, если результат решения задачи не может быть выражен целым числом или конечной десятичной дробью, то компьютерное решение не позволит нам получить точное значение результата. Кроме того, компьютерное решение задачи далеко не всегда согласуется и помогает обнаружить аналитическое решение. Заметим также, что большинство интерактивных геометрических сред имеют ограничения в использовании, связанные с непродуманностью во всех деталях алгоритмов их разработки. Так, GeoGebra 4.2 позволяет задавать через строку ввода не любые зависимости, распознает не все точки пересечения графических объектов, разделяет смысловые значения графических объектов при использовании инструмента «Исследователь функций», например не работает с графиками линейных и квадратичных функций, считая их геометрическими объектами (коническими сечениями).

Список литературы

1. Азаров А.И., Федосенко В.С., Барвенов С.А. Экзамен по математике: задачи с параметрами: функциональные методы решения / А.И. Азаров, В.С. Федосенко, С.А. Барвенов. – Минск : Полымя, 2001. – 352 с.

2. Горнштейн П.И., Полонский В.Б., Якир М.С. Задачи с параметрами. – 3-е издание, дополненное и переработанное. – М. : Илекса; Харьков : Гимназия, 1998. – 336 с.
3. Кравцев С.В. [и др.] Методы решения задач по алгебре: от простых до самых сложных. – М. : Экзамен, 2001. – 544 с.
4. Обучение геометрии с использованием возможностей GeoGebra : учебно-методическое пособие / О.Л. Безумова и др. – Архангельск : КИРА, 2011. – 140 с.
5. Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования [Электронный ресурс]. – Режим доступа: (http://standart.edu.ru/catalog.aspx?CatalogId=2588 (дата обращения: 6.01.13).

Рецензенты:

Санина Е.И., доктор педагогических наук, профессор кафедры высшей математики Российского университета дружбы народов, г. Москва.

Сергеева Т.Ф., доктор педагогических наук, профессор, зав. кафедрой общих математических и естественнонаучных дисциплин Академии социального управления, г. Москва.