

ЗАДАЧИ ОБРАБОТКИ ДЕТАЛЕЙ СО СЛОЖНЫМ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИМ МАРШРУТОМ

Межецкая М.А.¹, Сервах В.В.²

¹ ФГБОУ ВПО «Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского», Омск, Россия (644077, г. Омск, пр. Мира, 55-а.), e-mail: 1283@mail.ru

² «Омский филиал ФГБУН Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН», Омск, Россия (644099, г. Омск, ул. Певцова, 13), e-mail: svv_usa@rambler.ru

В последнее время простые конвейерные системы все чаще заменяются на высокотехнологические гибкие производственные линии. Это можно объяснить высокой мобильностью экономики, частой сменяемостью и совершенствованием продукции. Гибкость линий обеспечивается за счет внедрения дорогостоящих многофункциональных рабочих станций. Такое оборудование позволяет выполнять несколько различных операций и поэтому может использоваться в маршруте обработки деталей многократно. Это приводит к задачам, в которых обработка каждой детали проходит сложный технологический маршрут, с повторным использованием некоторого оборудования. В работе проведен анализ трудности решения таких задач с различными критериями и ограничениями. Рассматривается вопрос использования циклических расписаний при минимизации общего времени обработки однотипных деталей. Введено понятие периодических расписаний, описываются их недостатки и преимущества. Предложены алгоритмы решения поставленных задач.

Ключевые слова: гибкие производственные линии, циклические расписания, периодические расписания.

PROCESSING OF JOBS WITH THE COMPLEX TECHNOLOGICAL ROUTE

Mezhetskaya M.A.¹, Servakh V.V.²

¹ «Omsk State University of F.M. Dostoyevsky», Omsk, Russia (644077, Omsk, av. Mira, 55-a), 1283@mail.ru

² «Omsk Branch of Sobolev Institute Mathematics of SB RAS», Omsk, Russia (644099, Omsk, st. Pevtsova, 13), e-mail: svv_usa@rambler.ru

Simple conveyor systems are replaced by the high-tech flexible production lines on the last time. This fact can be explained by high mobility of the economy, the frequent turnover and improvement of the products. The flexibility of the lines is ensured through the introduction of expensive multi-function workstations. Such equipment allows us to perform a number of different operations and therefore can be used in the treatment of details many times. This leads to problems in which the processing of each detail is undergoing a complicated technological route, with re-using some of the equipment. This paper analyzes the difficulties of solving such tasks to different criteria and limitations. We research cyclic scheduling which minimizing the total time of treatment of typical details. We introduce the concept of periodic schedules, describe their advantages and disadvantages. We offer different algorithms of solving tasks.

Key words: flexible production lines, cyclic scheduling, periodic scheduling.

Введение

В работе рассматривается задача оптимизации выпуска партии однотипных деталей. Большие партии деталей обычно обрабатываются на конвейерной линии. Задача построения расписаний для конвейера является достаточно простой. Однако в последнее время постоянно меняющаяся номенклатура изделий требует гибкой перенастройки производственной линии, что достигается за счет использования дорогостоящих многофункциональных рабочих станций. Требование загрузки такого универсального оборудования приводит к тому, что на одних и тех же машинах выполняются различные операции технологической последовательности и возникают задачи обработки деталей со сложным технологическим маршрутом.

Постановка выглядит следующим образом. На производственной линии, состоящей из m различных машин M_1, M_2, \dots, M_m , необходимо обработать партию из N однотипных деталей. Обработка детали заключается в последовательном выполнении n операций O_1, O_2, \dots, O_n . Операция O_j выполняется на машине M_{m_j} в течение p_j единиц времени, $j = 1, 2, \dots, n$. Машины в технологическом маршруте могут повторяться. Прерывания операций запрещены. Одновременное выполнение двух и более операций на одной машине не допускается. Требуется минимизировать общее время обработки всех деталей.

Эта задача является частным случаем разномаршрутной задачи теории расписаний, которая заключается в минимизации общего времени обработки N деталей на m машинах, но число операций каждой детали и их технологические маршруты различны. Такая задача в англоязычной литературе называется Job-Shop и обозначается $J//C_{\max}$. Она является NP-трудной в сильном смысле. В [4] показано, что задача $J//C_{\max}$ при условии, что количество обрабатываемых деталей n ограничено константой, разрешима за псевдополиномиальное время. Более того, для ее решения построена вполне полиномиальная аппроксимационная схема трудоемкости $O(2R^2N^2/\varepsilon^N)$, где R – общее число операций всех деталей, а ε – относительная оценка точности полученного решения [9]. Еще одно важное утверждение доказано в [10]: задача минимизации общего времени с тремя работами $J3|N=3|C_{\max}$ является NP-трудной.

Естественно, утверждения о существовании псевдополиномиального алгоритма и аппроксимационной схемы верны и для частного случая задачи Job-Shop, когда все детали одинаковые. Понятно, что задача с однотипными деталями проще, однако полиномиальных алгоритмов ее решения до настоящего времени не разработано. В данной работе проведен анализ сложности решения этой задачи. В §1 доказывается ее NP-трудность. В §2 рассматривается вопрос использования циклических расписаний при минимизации общего времени обработки однотипных деталей. В §3 введено понятие периодических расписаний, описываются их недостатки и преимущества.

1. Сложность задачи обработки однотипных деталей.

Критерий минимизации общего времени обработки партии деталей является наиболее естественным. Однако, несмотря на простоту формулировки, вопрос о трудности решения задачи обработки однотипных деталей со сложным технологическим маршрутом оставался открытым. В настоящей работе удалось получить ответ на этот вопрос.

Теорема 1. *Задача минимизации общего времени обработки однотипных деталей со сложным технологическим маршрутом является NP-трудной.*

В одну сторону доказательство очевидно. Если для деталей J_1, J_2 и J_3 существует расписание длины не более чем d , то для пар J_1, J_2 и J_2, J_3 тем более существует расписание длины не более чем d , и изображенное на рисунке 2 расписание имеет длину не более $84d$.

Теперь в другую сторону. Прежде всего, на рисунке 3 выделим в расписании операции, сдвиг которых может влиять на общую длину расписания.

1	0	1	2	J1	2	0	J2	0	1	J3	1	2	0	2						
			1	0	1	2	J1	2	0	J2	0	1	J3	1	2	0	2			
						1	0	1	2	J1	2	0	J2	0	1	J3	1	2	0	2

Рис. 3. Множество возможных критических работ.

Пусть для деталей J_1, J_2, J_3 не существует расписания длины d . Это означает, что длина оптимального расписания больше d . Выделим в оптимальном расписании критический путь. Критический путь – это такая последовательность непрерывно выполняемых операций, сдвиг любой из которых приводит к увеличению длины расписания. Уменьшить критический путь тоже нельзя. Осталось заметить, что совместная обработка деталей J_1, J_2, J_3 ограничена окном длины d , расположенным в середине расписания на рисунке 3. Действительно, детали J_3 и J_1 ограничены с обеих сторон критическими работами, сдвигать которые нельзя. Операции детали J_2 также ограничены с обеих сторон, так как первая операция этой детали обрабатывается на машине M_1 , а последняя на M_2 или M_1 . А критический путь оптимального расписания имеет длину больше d . Противоречие. Теорема доказана.

В доказательстве показано, что для решения задачи с однотипными деталями в случае сложного технологического маршрута фактически приходится решать разномаршрутную задачу Job-Shop. Проведем структурный анализ сложности задачи, в зависимости от входных параметров. Задача Job-Shop является NP-трудной в сильном смысле, но если число деталей фиксировано, то задача NP-трудна в обычном смысле и псевдополиномиально разрешима. Как следствие, задача минимизации общего времени обработки фиксированного числа однотипных деталей будет псевдополиномиально разрешима. Таким образом, доказанный в теореме результат означает, что трудность задачи определяется длительностями операций, а от количества операций n зависимость полиномиальная. Однако остается открытым вопрос о сложности задачи в зависимости от числа деталей N .

2. Подходы к решению задачи.

При обработке однотипных деталей удобно использовать так называемые циклические расписания. Обозначим через s_{jk} время начала выполнения операции O_j детали k . Расписание называется **циклическим**, если для любого $j = 1, 2, \dots, n$ и для любого $k = 1, 2, \dots, N$ выполняется $s_{jk} = s_{j1} + (k - 1)C$, где C – длина цикла или циклическое время. Циклические расписания играют важную роль в организации производства. Они обеспечивают ритмичность загрузки оборудования и исполнителей, позволяют эффективно планировать как поставки ресурсов, так и сбыт продукции. Задача построения расписания с минимальной длиной цикла полиномиально разрешима. Минимальное время цикла C^* есть сумма операций на самой загруженной машине.

В данном параграфе исследуется возможность использования оптимальных циклических расписаний при минимизации общего времени обработки всех деталей. Такой подход развивается в работах [5; 6]. Идея алгоритма из [5] следующая. Строим расписание с минимальным временем цикла и выполняем по нему все N работ. При этом достаточно большими оказываются периоды запуска деталей на производственную линию и их завершение. Эти два блока обработки деталей в начале и в конце приводят к тому, что оптимум в задаче минимизации общего времени обработки всех деталей может не достигаться. Но если N растет, то в пределе получаем максимальную производительность линии. Следовательно, такой алгоритм будет асимптотически точным. В [6] предложен аппроксимационный алгоритм, в котором отклонение от оптимума не зависит от числа работ. Ключевым моментом является демонстрация того, как относительно легко получить хорошие аппроксимационные решения для задач с однотипными деталями.

Таким образом, оптимальное значение длины цикла обеспечивает асимптотическую точность алгоритма. Недостатками такого подхода являются длительное время обработки каждой детали, возникающие простои, промежуточное хранение и дополнительная транспортировка, а также издержки, связанные с запуском всей партии в производство. Ниже предлагается алгоритм, который частично нивелирует эти недостатки.

Приведем формальное описание алгоритма.

Шаг 0. Находим C^* , равное суммарной длительности операций на самой загруженной машине.

Шаг 1. Все операции первой детали выполняем последовательно без простоев, начиная с нулевого момента времени.

Шаг k. Полагаем $t(j, k) = t(j, k-1) + C^*$ и, начиная с последней, устанавливаем все операции этой детали в соответствии с этим расписанием. Если очередную операцию поставить нельзя, то сдвигаем операции предыдущих деталей, пересчитывая расписание.

Алгоритм заканчивает свою работу, когда очередная деталь устанавливается уже без сдвига операций.

Теорема 2. *Предложенный алгоритм построения циклических расписаний минимизирует время цикла и является асимптотически точным для задачи минимизации общего времени обработки однотипных деталей.*

Доказательство. Минимизация времени цикла непосредственно следует из построения, так как в цикле машина с максимальной загрузкой не простаивает. Как было сказано выше, минимальная длина цикла C^* совпадает с загрузкой этой машины. Пусть обработка одной детали растянулась на K циклов. Заметим, что K не зависит от количества деталей N . Первая деталь завершится не позднее момента KC^* . После этого каждая последующая деталь будет выпускаться через промежуток времени, равный C^* , и все детали завершаются не позднее $KC^* + (N-1)C^*$. С другой стороны, расписание не может иметь длину меньше, чем NC^* . Тогда относительная оценка предложенного алгоритма для критерия общего времени завершения работ не превзойдет величины $\frac{KC^* + (N-1)C^*}{NC^*} = 1 + \frac{K-1}{N}$. Так как K от N не зависит, то при $N \rightarrow \infty$ оценка стремится к нулю, то есть алгоритм является асимптотически точным.

Отметим, что предложенный алгоритм, в отличие от подхода из [5], направлен, в том числе, и на уменьшение значения K , и получаемые оценки относительной погрешности будут лучше.

Отметим, что предложенный алгоритм, в отличие от подхода из [5], направлен, в том числе, и на уменьшение значения K , и получаемые оценки относительной погрешности будут лучше.

Отметим, что предложенный алгоритм, в отличие от подхода из [5], направлен, в том числе, и на уменьшение значения K , и получаемые оценки относительной погрешности будут лучше.

3. Периодические расписания.

Расписание называется L -периодическим со временем периода T , если для каждого $j=1,2,\dots,n$ и натурального $k>L$ выполняется $t(j, k) = t(j, k-L) + T$, где $t(j, k)$ – время начала выполнения операции j детали k , а L – количество деталей в периоде. Циклические расписания, рассматриваемые в предыдущем параграфе, являются 1-периодическими. Поэтому периодические расписания являются более широким классом и, естественно, оптимальное значение общего времени завершения работ в этом классе расписаний должно быть не больше, чем в классе циклических. При фиксированном L задача построения L -периодического расписания также полиномиально разрешима. Возникает вопрос, насколько существенно может быть улучшена целевая функция?

В работе было проведено исследование различных характеристик L -периодического расписания. Кроме общей длины периода T и времени завершения работ C_{\max} рассматривалась величина h – максимальное число одновременно обрабатываемых деталей. Она становится важной, когда на производственной линии недостаточно позиций для хранения незавершенных деталей либо затраты на промежуточное хранение и

транспортировку велики. Примером производственной линии с таким ограничением является сборка самолетов, когда количество позиций для сборки ограничено. Другим примером может служить химическая обработка деталей. Деталь крепится на оснастку и последовательно обрабатывается в различных резервуарах. Количество одновременно обрабатываемых деталей ограничено числом таких оснасток, которое также фиксировано.

Удалось установить, что при заданном N для любого L -периодического расписания с периодом $T=LC$ существует циклическое расписание с таким же значением N и длиной цикла C . Таким образом, несмотря на расширения множества, на котором оптимизируется целевая функция, по этому параметру улучшения не получаем.

Эксперимент показал, что удастся сократить общее время обработки всех деталей в период запуска партии и ее завершения. Но основной цикл для L -периодических и циклических расписаний по производительности линий полностью совпадает. То есть при большом количестве деталей циклические расписания сравнимы с L -периодическими, но существенно лучше в смысле ритмичности производства.

Выпишем основные **выводы** проведенного исследования.

1. Доказано, что задача обработки однотипных деталей при сложном технологическом маршруте не проще общей разномаршрутной задачи теории расписаний.
2. Для построения приближенных решений минимизации общего времени обработки однотипных деталей эффективно использовать оптимальные циклические расписания.
3. Расширение класса изучаемых расписаний от циклических до L -периодических не приводит к улучшению характеристик по критериям средней частоты выпуска готовых деталей, числа одновременно обрабатываемых деталей и других. Кроме того, циклические расписания предпочтительнее L -периодических по критериям регулярности и ритмичности.
4. Можно добиться улучшения для критерия общего времени завершения работ, однако при большом объеме партии существенных выгод L -периодические расписания по сравнению с циклическими не дают, так как улучшения возможны только в начале и в конце расписания.

Список литературы

1. Межецкая М.А. О задаче обработки большой партии однотипных деталей // III Всероссийская конференция «Проблемы оптимизации и экономические приложения» : материалы конференции, 2006. – С. 107.
2. Межецкая М.А., Сервах В.В. О задаче обработки партии однотипных деталей со сложным технологическим маршрутом // Доклады третьей Международной научной конференции «Танаевские чтения», 2007. – С. 119-121.

3. Межецкая М.А., Сервах В.В. О задаче минимизации общего времени выпуска партии однотипных деталей // Материалы XIV Байкальской международной школы-семинара «Методы оптимизации и их приложения». – Иркутск, 2008. – С. 468-474.
4. Сервах В.В. О задаче Акерса-Фридмана // Управляемые системы. – Новосибирск, 1983. – Вып. 23. – С. 70-81.
5. Boudoukh T. Algorithms for solving job shop problems with identical and similar jobs, based on fluid approximation (Hebrew with English synopsis) // MSc Thesis, Technion, Haifa, Israel. – 1999.
6. Boudoukh T., Penn M., Weiss G. Scheduling jobshops with some identical or similar jobs // Journal of Scheduling. – 2001. – Vol. 4. – P. 177-199.
7. McCormick S.T., Pinedo M.L., Shenker S., Wolf B. Sequencing in an assembly line with blocking to minimize cycle time // Operation Research. – 1989. – V. 37. – P. 925-935.
8. Mezheritskaya M., Romanova A. Approximate solution for makespan minimization job shop problem with identical jobs // Abstracts of International Annual Scientific Conference «Operations Research in the Service Industry». – Saarbrücken, Saarland University, 2007. – P. 171.
9. Romanova A.A., Servakh V.V. On some cyclic machine scheduling problem // Abstracts of International Conference of the European Chapter on Combinatorial Optimization. – Minsk, 2005. – P. 58-59.
10. Sotskov Y.N., Shakhlevich N.V. NP-hardness of shop-scheduling problems with three jobs // Discrete Appl. Math. – 1995. – 59 (3). – P. 237-266.

Рецензенты:

Забудский Геннадий Григорьевич, д.ф.-м.н., профессор, ведущий научный сотрудник лаборатории дискретной оптимизации, Омский филиал института математики им. С.Л. Соболева СО РАН, г. Омск.

Задорин Александр Иванович, доктор физико-математических наук, зав. лабораторией математического моделирования в механике, Омский филиал института математики им. С.Л. Соболева СО РАН, г. Омск.