

АНАЛИЗ ЭФФЕКТИВНОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ ДЕЛЬТА-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ ЗВЕНЬЕВ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Андреев В. С.¹, Бутусов Д. Н.¹, Каримов Т. И.¹, Липкин С. М.², Сотнин М. И.³

¹Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В.И. Ульянова (Ленина)», Санкт-Петербург, Россия (197376, Санкт-Петербург, ул. Проф. Попова, д.5), e-mail: valery.s.andreev@gmail.com

²Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Южно-Российский государственный технический университет (Новочеркасский политехнический институт)» г. Новочеркасск, Россия (346428, Ростовская область, г. Новочеркасск, ул. Просвещения, д. 132), e-mail: rektorat@npi-tu.ru

³Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Новгородский государственный университет им. Ярослава Мудрого» г. Великий Новгород, Россия (173003, г. Великий Новгород, ул. Большая Санкт-Петербургская, д.41), e-mail: novsu@novsu.ru

В статье производится оценка эффективности применения дельта-преобразования при переходе от непрерывного описания систем дифференциальных уравнений к дискретной форме на примере моделирования различных типовых звеньев второго порядка. Дается краткое описание дельта-оператора и описываются способы эквивалентного перехода от передаточных функций в z- и s-форме к передаточным функциям в дельта-форме. Методом совместного интегрирования реализована обобщенная модель динамической системы n-го порядка, описываемая дельта-оператором. Для оценки дельта-систем во временной и частотной области использовалась среда модельного проектирования NI LabVIEW, где был реализован ряд моделей передаточных функций в различных формах представления. Результаты моделирования представлены графически. Показано, что применение дельта-преобразования и совместного интегрирования при вычислениях с фиксированной точкой позволяет повысить степень эквивалентности цифровой и непрерывной систем.

Ключевые слова: моделирование, звено второго порядка, дельта-преобразование, z-преобразование, погрешность интегрирования.

EFFECTIVENESS OF DELTA TRANSFORMATION AT MODELING SECOND ORDER ELEMENTS

Andreev V. S.¹, Butusov D. N.¹, Karimov T. I.¹, Lipkin S. M.², Sotnin M. I.³

¹Saint-Petersburg State Electrotechnical University, Saint-Petersburg, Russia. (197376, 5, Professora Popova st., Saint-Petersburg, Russia), e-mail: valery.s.andreev@gmail.com

²South-Russian State Technical University, (346428, 132, Prosvescheniya st., Novocherkassk, Rostov Oblast, Russia), e-mail: rektorat@npi-tu.ru

³Novgorod State University (173003, 41, B. St. Petersburgskaya st., Veliky Novgorod, Russia), e-mail: novsu@novsu.ru

The article made of the efficiency of the delta - transformation in the transition from a continuous description of systems of differential equations to discrete form by the example of the different units of the second-order model. The short description the delta-operator is given and ways of equivalent transition from transfer functions in z- and s- form to transfer functions in the delta-form are described. Generalized model of a dynamical system n-th order, described Delta-operator, is realized by method of joint integration. For an assessment the delta-systems in time and frequency domain was used the environment of model design of NI LabVIEW, which has implemented a number of models of transfer functions in the various forms of representation. The simulation results are presented graphically. It is shown that application the delta-transformation and joint integration at calculations with the fixed point allows to raise degree of equivalence of digital and continuous systems.

Key words: computer modeling, second order element, delta-transform, z-transform, integration error.

Введение

Дельта-преобразование является, наряду с более известным z-преобразованием, одним из методов математического описания дискретных систем. Разработанное практически одновременно с z-преобразованием, оно долгое время оставалось мало востребованным, так

как невысокое быстродействие вычислительных машин прошлого, применяемых при реализации систем автоматического управления и при цифровой обработке сигналов, не позволяло проявляться главному недостатку z-преобразования, а именно: при стремлении периода дискретизации к нулю корни и полюса системы в z-области стремятся к единице [4]. При ограниченной точности машинного представления чисел различные корни стремятся «слиться» друг с другом и с единицей; динамическая характеристика такой цифровой системы не повторяет характеристику непрерывной и может существенно отличаться от нее [5]. Этим эффектом можно пренебречь, если использовать представление чисел с плавающей точкой. Однако на аппаратном уровне его поддерживает довольно ограниченное число контроллеров. Использование же чисел с плавающей точкой на программном уровне приводит к существенному увеличению времени выполнения программы. В результате разработка цифровой системы управления с малым периодом дискретизации становится труднореализуемой задачей.

В то же время дельта-преобразование не имеет вышеописанного недостатка. При уменьшении периода дискретизации динамическая характеристика такой цифровой системы стремится к характеристике непрерывной. Еще больше повысить эффективность дельта-преобразования можно путем реализации программы не каноническими формами программирования, а так называемым совместным интегрированием, описанным в работе [2]. При этом становится возможным использование 16-битного и даже 8-битного контроллера там, где в случае z-преобразования приемлемую точность давал бы только 32-битный.

Преобразование непрерывных и z-систем в дельта-системы

Основная идея дельта-преобразования – использование метода Эйлера для вычисления производной:

$$\delta u[k] = \frac{u([k+1]\Delta) - u([k]\Delta)}{\Delta} \approx \left. \frac{\partial u(t)}{\partial t} \right|_{u=u(k\Delta)} = su(t), \quad (1)$$

где Δ – период дискретизации.

Как аналог оператора s введем оператор γ , который имеет следующий смысл:

$$\gamma u[k] = \frac{u[k+1] - u[k]}{\Delta} \approx su(t), \quad (2)$$

Выведем связь с z-преобразованием. Как известно, его суть состоит в переходе от операции дифференцирования к операции сдвига во времени. Переменная z при этом обозначает сдвиг во времени на 1 шаг вперед:

$$u[k+1] = zu[k] \quad (3)$$

Исходя из (2) и (3), можно записать связь между переменными γ и z :

$$\begin{aligned} \mu[k] &= \frac{u[k+1] - u[k]}{\Delta} = \frac{zu[k] - u[k]}{\Delta} = \left(\frac{z-1}{\Delta} \right) u[k] \Rightarrow \\ &\Rightarrow \gamma = \frac{z-1}{\Delta} \Rightarrow z = 1 + \gamma\Delta \end{aligned} \quad (4)$$

Одним из наиболее удобных способов аппроксимации непрерывной системы, сохраняющей ее устойчивость, является билинейное преобразование, или преобразование Тастина. С учетом выражения (3), можно записать формулу перехода по методу Тастина из s-области в дельта-область:

$$s = \frac{2}{T} \frac{\Delta\gamma}{\Delta\gamma + 2} \quad (5)$$

В данном случае Δ – период дискретизации при дифференцировании методом Эйлера, а T – период дискретизации интегрирования, причем они необязательно равны.

С точки зрения инженерной практики, удобно сперва перевести непрерывную систему в z-систему, а затем преобразовать ее коэффициенты таким образом, чтобы заменить оператор z на γ . Допустим, у нас имеется дискретная передаточная функция второго порядка:

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} \quad (6)$$

Из формулы (4) известна связь z и γ , откуда следует связь z^{-1} и γ^{-1} :

$$z^{-1} = \frac{\gamma^{-1}}{\gamma^{-1} + \Delta} \quad (7)$$

Используя выражения (4) или (7), мы можем преобразовать передаточную функцию дискретной системы к виду:

$$H(\gamma) = \frac{\beta_0 + \beta_1 \gamma^{-1} + \beta_2 \gamma^{-2}}{1 + \alpha_1 \gamma^{-1} + \alpha_2 \gamma^{-2}} \quad (8)$$

Связь коэффициентов функций в z и γ форме представлена в таблице 1.

Таблица 1. Связь коэффициентов дельта и z для передаточных функций 2-го порядка

β_0	$\beta_0 = b_0$	α_0	$\alpha_0 = 1$
β_1	$\beta_1 = \frac{2b_0 + b_1}{\Delta}$	α_1	$\alpha_1 = \frac{2 + a_1}{\Delta}$
β_2	$\beta_2 = \frac{b_0 + b_1 + b_2}{\Delta^2}$	α_2	$\alpha_2 = \frac{1 + a_1 + a_2}{\Delta^2}$

Функции более высокого порядка, чем 2-й, на практике лучше реализовать как последовательное соединение функций 1-го и 2-го порядка для уменьшения эффектов округления и переполнения разрядной сетки [1].

Совместное интегрирование

В работе [2] показано, что совместное интегрирование имеет более высокую точность при реализации численных методов интегрирования. Рассмотрим этот метод подробно.

Пусть имеется передаточная функция n -го порядка, которая была преобразована в систему дифференциальных уравнений 1-го порядка:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial x_n}{\partial t} = -a_n y + b_n r \\ \frac{\partial x_{n-1}}{\partial t} = x_n - a_{n-1} y + b_{n-1} r \\ \dots \\ \frac{\partial x_1}{\partial t} = x_2 - a_1 y + b_1 r \\ y = \frac{1}{a_0} x_1 + \frac{b_0}{a_0} r \end{array} \right. \quad (9)$$

Приведем ее к виду для совместного интегрирования:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_n = s^{-1}(-a_n y + b_n r) \\ x_{n-1} = s^{-1}(x_n - a_{n-1} y + b_{n-1} r) \\ \dots \\ x_1 = s^{-1}(x_2 - a_1 y + b_1 r) \\ y = \frac{1}{a_0} x_1 + \frac{b_0}{a_0} r \end{array} \right. \quad (10)$$

Теперь перейдем от непрерывной системы к дельта-системе. Для этого оператор интегрирования s^{-1} заменим на γ^{-1} . Учитывая, что $\gamma^{-1} = \frac{\Delta}{z-1}$, можно записать:

$$x_1^{k+1} = x_1^k + \Delta(x_2^k - \alpha_1 y^k + \beta_1 r^k) \quad (11)$$

Подставляя выражение для y из системы (10), получим окончательно:

$$x_1^{k+1} = (1 - \Delta \frac{\alpha_1}{\alpha_0}) x_1^k + \Delta x_2^k + \Delta (\beta_1 - \frac{\alpha_1 \beta_0}{\alpha_0}) r^k \quad (12)$$

Проделав аналогичные выкладки для всех уравнений системы (10), нетрудно записать общий вид матриц пространства состояний совместного интегрирования для дельта-системы:

$$A = \begin{bmatrix} 1 - \frac{\Delta\alpha_1}{\alpha_0} & \Delta & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{\Delta\alpha_2}{\alpha_0} & 1 & \Delta & \dots & 0 \\ & & \dots & & \\ -\frac{\Delta\alpha_{n-1}}{\alpha_0} & 0 & \dots & 1 & \Delta \\ -\frac{\Delta\alpha_n}{\alpha_0} & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \Delta(\beta_1 - \alpha_1 \frac{\beta_0}{\alpha_0}) \\ \Delta(\beta_2 - \alpha_2 \frac{\beta_0}{\alpha_0}) \\ \dots \\ \Delta(\beta_n - \alpha_n \frac{\beta_0}{\alpha_0}) \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha_0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}^T, D = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \alpha_0 \end{bmatrix} \quad (13)$$

Сравнение z-преобразования и дельта-преобразования на простейшем звене

Возьмем в качестве примера простейшее колебательное звено второго порядка:

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1} \quad (14)$$

Пусть период дискретизации $T = 0,1$ сек и $\Delta = 0,1$ сек. Тогда в z-области система будет выглядеть так:

$$H(z) = \frac{0,00238z^2 + 0,00475z + 0,00238}{0,9049z^2 - 1,8955z + 1} \quad (15)$$

Отсюда, используя формулы из таблицы 1, получим дельта-форму:

$$H(\gamma) = \frac{0,0483\gamma^2 + 0,095\gamma + 0,95}{\gamma^2 + 1,045\gamma + 0,95} \quad (16)$$

Точные значения коэффициентов переведем в значения с фиксированной точкой при длине машинного слова 16 бит (при этом 14 бит отводятся на запись единицы, то есть $1_{10} \rightarrow 2_{fp}^{14} = 16384_{fp}$).

1. Реакция на ступенчатое воздействие

Для анализа дельта-оператора были построены графики z-системы в форме прямого программирования, дельта-системы в форме совместного интегрирования и непрерывной системы. График ошибки моделирования цифровых систем представлен на рисунке 1.

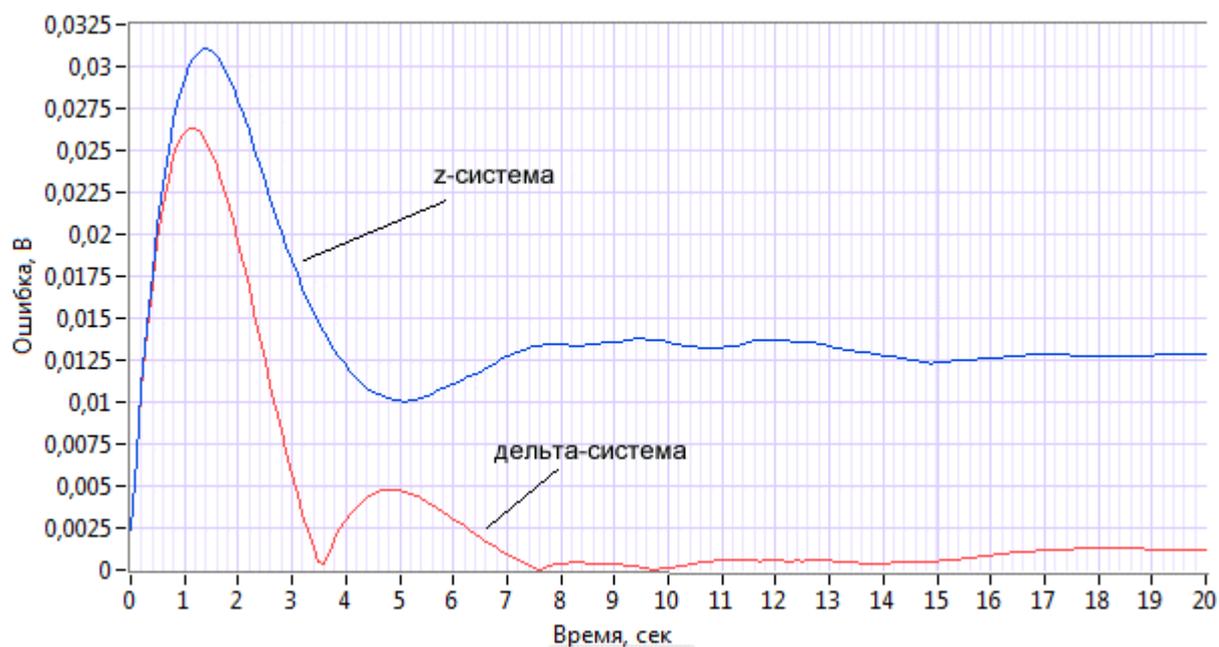


Рисунок 1. Погрешность моделирования переходной характеристики цифровых систем относительно непрерывной системы

Устоявшаяся ошибка в дельта-системе имеет порядок 10^{-3} , тогда как в z-системе она имеет порядок 10^{-2} . В то же время при длине машинного слова 16 бит (и из них 14 отведено под дробную часть), коэффициенты системы задаются с точностью порядка 10^{-5} . Таким образом, можно заключить, что одновременное использование дельта-преобразования и совместного интегрирования дает точность выходного сигнала, лишь на два порядка уступающую машинной точности представления чисел, и при этом на порядок точнее, чем использование z-преобразования.

2. Реакция на гармоническое воздействие

Далее исследуем реакцию системы на синусоидальное воздействие. Этот эксперимент особенно показателен в связи с тем, что при конструировании цифровых фильтров чаще всего приходится иметь дело именно с этим классом сигналов.

Пусть период дискретизации $T = 0,1$ сек и параметр $\Delta = 0,1$ сек; частота входного синусоидального сигнала выбрана $f = 0,1$ Гц (период равен 100 периодам дискретизации). Моделирование проводится при длине машинного слова 16 бит.

На рисунке 2 приведены графики погрешности моделирования z- и дельта-систем относительно выходного сигнала непрерывной системы.

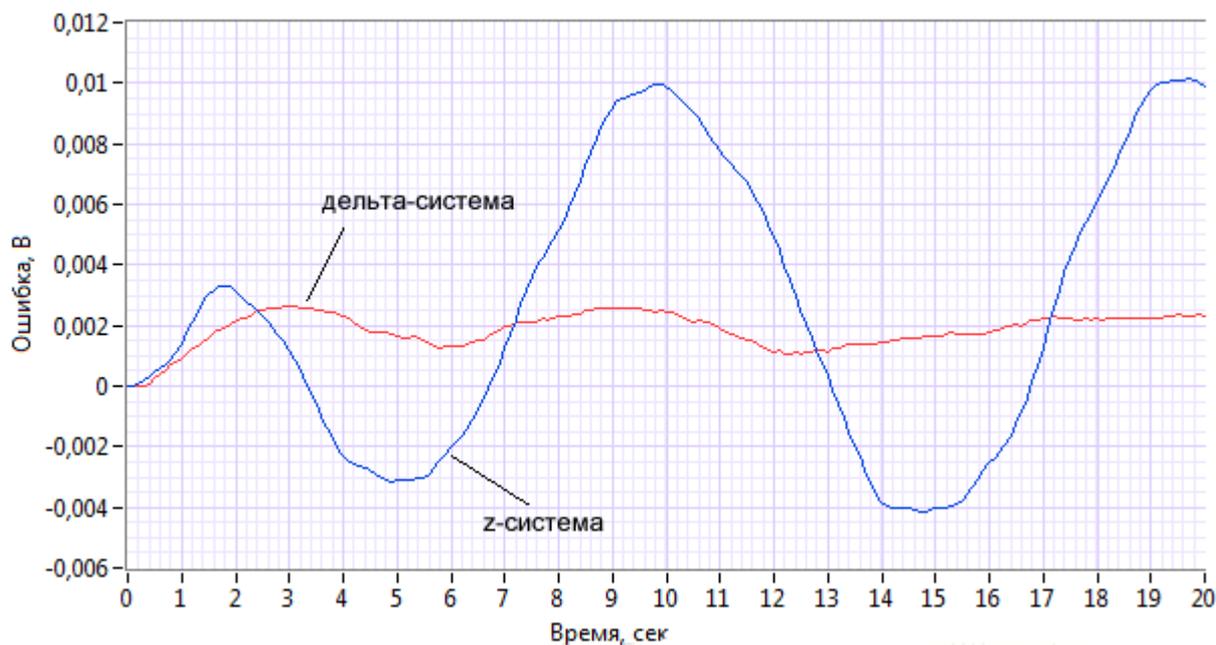


Рисунок 2. Погрешность реакции цифровых систем относительно реакции непрерывной

Для дельта-системы используется совместное интегрирование как более точный метод.

Ошибка в этом случае меньше на порядок, как и в случае реакции на единичный скачок.

Сравнения частотных характеристик z- и дельта-систем

Одной из часто используемых систем второго порядка является режекторный фильтр.

Он задается передаточной функцией:

$$H(s) = \frac{s^2 + \omega_0^2}{s^2 + 2\omega_c s + \omega_0^2} \quad (17)$$

где ω_0 - вырезаемая частота (рад/с), а ω_c - ширина полосы заграждения. На практике режекторный фильтр применяются чаще всего для отсеечения помехи частотой 50 ± 2 Гц.

Соответственно, возьмем $\omega_0 = 50 \text{ Гц} \approx 314 \frac{\text{рад}}{\text{с}}$ и $\omega_c = 2 \text{ Гц} \approx 12,6 \frac{\text{рад}}{\text{с}}$. Тогда функция (34)

примет вид:

$$H(s) = \frac{s^2 + 98596}{s^2 + 25,2s + 98596} \quad (18)$$

Используя преобразование Тастина, найдем функцию в z-форме:

$$H(z) = \frac{0,9987z^2 - 1,996z + 0,9987}{0,9974z^2 - 1,996z + 1} \quad (19)$$

Произведем дельта-преобразование, опираясь на выражение (19):

$$H(\gamma) = \frac{0,9987\gamma^2 + 0,4922\gamma + 246,119}{\gamma^2 + 1,75\gamma + 246,119} \quad (20)$$

Период дискретизации $T = 10^{-4}$ сек и параметр $\Delta = 0,02$ сек. Моделирование вновь проводится при длине машинного слова 16 бит.

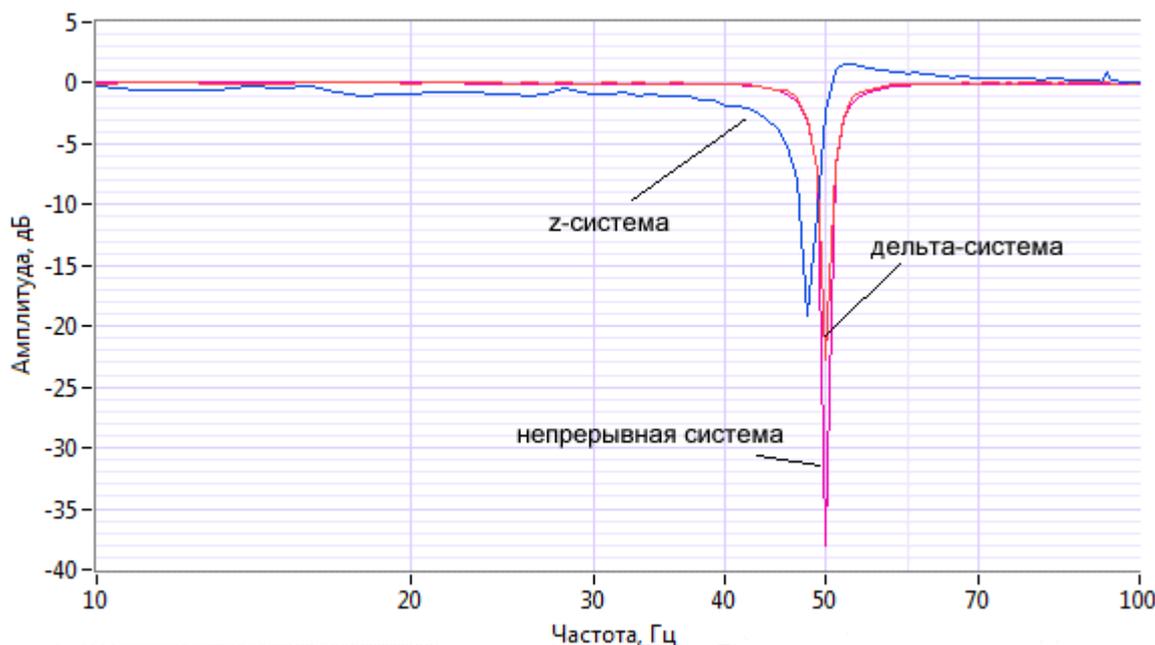


Рисунок 3. АЧХ непрерывного и цифровых режекторных фильтров

Анализ графика АЧХ показывает, что z-система ведет себя неудовлетворительно:

- а) подавляемая ею частота составляет 48 Гц, а не 50 Гц;
- б) на частоте 51 Гц (входит в область подавления) ее коэффициент усиления больше единицы;
- в) АЧХ неровная, имеет побочные пики (например, на частоте 93 Гц).

Таким образом, при 16-битном машинном представлении режекторный фильтр, построенный на основе z-преобразования, имеет неудовлетворительную АЧХ. В то же самое время АЧХ фильтра, построенного на основе дельта-преобразования, очень близка к АЧХ непрерывного фильтра. Более того, в работе [5] показано, что, используя дельта-преобразование, возможна реализация подобного режекторного фильтра даже на 8-битном контроллере.

Заключение

В статье было дано определение дельта-преобразования и рассмотрены способы перехода от непрерывных и z-систем к дельта-системам. Также было предложено объединить метод совместного интегрирования с дельта-преобразованием, позволяющий реализовать дельта-систему на вычислительном устройстве с наиболее высокой точностью.

Было показано, что применение дельта-преобразования и совместного интегрирования при вычислениях с фиксированной точкой позволяет повысить точность вычислений и приблизить цифровую систему по своим характеристикам к непрерывной. В частности, характеристика цифрового запаздывающего звена, построенного на основе дельта-

преобразования, на порядок ближе к характеристике непрерывной системы при ступенчатом и синусоидальном воздействиях, чем характеристика z-системы.

Преимущества дельта-преобразования отчетливо проявляются при малых периодах дискретизации. Так, с помощью дельта-преобразования был реализован цифровой режекторный фильтр, который показал значительно лучшие характеристики, чем фильтр на основе z-преобразования.

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ в рамках Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009–2013 годы» (Государственный контракт № 14.В37.21.2021 от 11 ноября 2012 г.).

Список литературы

1. Бутусов Д. Н., Жуков К. Г. Коррекция погрешности решения дифференциальных уравнений второго порядка // Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. – 2010. – № 6 (113). – С. 121-126.
2. Бутусов Д. Н., Жуков К. Г. Реализация цифровых фильтров методом совместного интегрирования // Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. – СПб., 2009. – № 6. – С. 26-34.
3. Жуков К. Г., Бутусов Д. Н. Коррекция погрешности решения уравнения гармонического осциллятора методом последовательного интегрирования // Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. – 2010. – № 6 (113). – С. 135-144.
4. Ту Ю. Современная теория управления. «Машиностроение», 1971.
5. Newman M. J., Holmes D. G. Delta operator digital filter for high performance inverter applications // IEEE Transactions on Power Electronics. – 2003. – Vol.18. – No.1. – Part 2.

Рецензенты:

Анисимов Владимир Иванович, д.т.н., профессор кафедры систем автоматизированного проектирования. Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В. И. Ульянова (Ленина)», г. Санкт-Петербург.
Сольнищев Ремир Иосифович, д.т.н., профессор кафедры систем автоматизированного проектирования. Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В. И. Ульянова (Ленина)», г. Санкт-Петербург.