

РЕАЛИЗАЦИЯ ЦИФРОВОГО ИНТЕГРАТОРА С ПРИМЕНЕНИЕМ ДЕЛЬТА-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Каримов А. И.¹, Бутусов Д. Н.¹, Платонов С. М.², Лавров С. В.³, Мандра С. Г.⁴

¹Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В. И. Ульянова (Ленина)», Санкт-Петербург, Россия (197376, Санкт-Петербург, ул. Проф. Попова, д.5, e-mail: carimus@gmail.com

²Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Новгородский государственный университет им. Ярослава Мудрого», г. Великий Новгород, Россия (173003, г. Великий Новгород, ул. Большая Санкт-Петербургская, д.41), e-mail: novsu@novsu.ru

³Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение «Воронежский государственный университет инженерных технологий», г. Воронеж, Россия (394036, Россия, г. Воронеж, проспект Революции, 19), e-mail: post@vsuet.ru

⁴Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Самарский государственный технический университет», г. Самара, Россия (443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244), e-mail: rector@samgtu.ru

В статье описывается применение дельта-преобразования при переходе от непрерывного описания моделей динамических систем к их дискретному виду на примере реализации цифрового интегратора. Дается определение дельта-оператора и описываются способы работы с ним. На основе дельта-преобразования получены модели 16-битного и 32-битного цифровых интеграторов. Средствами среды модельного проектирования NI LabVIEW произведена оценка погрешности работы цифрового интегратора, полученного с помощью дельта-преобразования относительно интегратора, полученного с помощью z-преобразования. Приведены графические результаты моделирования работы вышеописанных интеграторов в среде LabVIEW. Сделаны выводы о точностных характеристиках моделей динамических систем, описываемых дельта-оператором. Доказано преимущество использования дельта-преобразования перед z-преобразованием при реализации цифрового интегратора с ограниченной длиной машинного слова.

Ключевые слова: моделирование, цифровой интегратор, дельта-преобразование, z-преобразование, погрешность.

IMPLEMENTATION OF DIGITAL INTEGRATOR WITH DELTA CONVERSION

Karimov A. I.¹, Butusov D. N.¹, Platonov S. M.², Lavrov S. V.³, Mandra S. G.⁴

¹Saint-Petersburg State Electrotechnical University, Saint-Petersburg, Russia. (197376, 5, Professora Popova st., Saint-Petersburg, Russia) e-mail: carimus@gmail.com

²Novgorod State University (173003, 41, B. St. Petersburgskaya st., Veliky Novgorod, Russia), e-mail: novsu@novsu.ru

³Federal State Budget Educational Institution of Higher Professional Education "Voronezh State University of Engineering Technologies" (394036, 19, prosp. Revoljucii, Voronezh, Russia), e-mail: post@vsuet.ru

⁴Samara State Technical University(443100, 244, Molodogvardeyskaya str., Samara, Russia), e-mail: rector@samgtu.ru

The article describes the use of the delta – transformation in the transition from a continuous description of models of dynamical systems to their discrete form as an example of realization of the digital integrator. The definition of the delta – the operator is given and the methods of work with him are described. On a basis the delta – transformations are received models 16-bit and 32-bit digital integrators. Means of model-based design environment NI LabVIEW evaluated the accuracy of the digital integrator, obtained by the delta – transformations in the integrator, obtained by the z-transform. The graphic results of design of work of the above-described integrators are resulted in the environment of LABVIEW. Conclusions about the accuracy characteristics of models of dynamic systems described by delta – operator are make. Demonstrated the advantage of using delta - transformation to z - transformation of the digital integrator with limited word length.

Key words: modeling, digital integrator, delta-transformation, z-transformation, error.

Введение

В настоящее время для задач автоматического управления и обработки сигналов широко применяются цифровые модели непрерывных систем. Основным элементом таких систем является цифровой интегратор: традиционно для его реализации используется математический аппарат, известный как z-преобразование [3]. Применение z-преобразования обнаруживает серьезный недостаток: при высокой частоте дискретизации корни и полюса системы в z-области стремятся к единице. Это существенно затрудняет работу с такими функциями на устройствах, не поддерживающих операции с плавающей точкой на аппаратном уровне. К ним относятся, прежде всего, 8- и 16-битные микроконтроллеры. В настоящее время их доля на мировом рынке составляет около 70 %, и это соотношение сохранится в течение ближайших лет [4]. Стоит отметить, что операции с плавающей точкой не поддерживают аппаратно и многие 32-битные устройства, в частности, оптимизированные на базе процессорных ядер Cortex M0 и Cortex M3. В свете этого представляется актуальной задача поиска эффективного способа описания цифровых систем при ограниченной разрядной сетке.

Альтернативой z-преобразованию, свободной от его недостатков, является т.н. дельта-преобразование (delta transform). Оно достаточно детально описано в работах Мидлтона и Гудвина (Middleton and Goodwin, 1980-е гг.), но по сей день остается малоизвестным способом перехода от непрерывных систем к дискретным.

Определение дельта-преобразования

В основе дельта-преобразования лежит известная операция численного дифференцирования первого порядка:

$$\delta u[k] = \frac{u([k+1]\Delta) - u([k]\Delta)}{\Delta} \approx \left. \frac{\partial u(t)}{\partial t} \right|_{u=u(k\Delta)} = su(t) \quad (1)$$

Символом Δ в данном случае обозначен период дискретизации. В качестве переменной вместо s введем γ , которая имеет следующий смысл:

$$\gamma u[k] = \frac{u[k+1] - u[k]}{\Delta} \approx su(t), \quad (2)$$

где $u[k]$ – значение сигнала в k -й момент времени.

Как известно [3], суть z-преобразования состоит в переходе от операции дифференцирования к операции сдвига во времени. Переменная z при этом обозначает сдвиг во времени на 1 шаг вперед: $u[k+1] = zu[k]$. (3)

Исходя из (2) и (3), нетрудно выяснить связь между переменными γ и z :

$$\begin{aligned} \gamma u[k] &= \frac{u[k+1] - u[k]}{\Delta} = \frac{zu[k] - u[k]}{\Delta} = \left(\frac{z-1}{\Delta} \right) u[k] \Rightarrow \\ &\Rightarrow \gamma = \frac{z-1}{\Delta} \Rightarrow z = 1 + \gamma\Delta \end{aligned} \quad (4)$$

Напомним, что связь между переменными s и z такова: $z = e^{sT}$ (5)

Из формулы (4) найдем связь между оператором сдвига e^{sT} и переменной γ :

$$\gamma = \frac{e^{sT} - 1}{\Delta} \quad (6)$$

Одним из наиболее употребительных способов перехода из преобразования Лапласа в z -преобразование является так называемое билинейное преобразование, или подстановка

$$\text{Тастина (приближенное), основанное на замене: } s = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1} \quad (7)$$

$$\text{Обратное преобразование Тастина основано на обратной замене: } z = \frac{1 + \frac{T}{2}s}{1 - \frac{T}{2}s} \quad (8)$$

Дискретизированная таким образом система сохраняет устойчивость, если исходная система была устойчива, что делает преобразование Тастина наиболее популярным способом перехода к дискретной системе. При переходе от z -преобразования к дельта-преобразованию также можно использовать преобразование Тастина. При этом связь между переменной γ и

$$s \text{ такова: } \gamma = \frac{\frac{T}{2}s}{1 - \frac{T}{2}s} \quad (9)$$

Фундаментальное отличие дельта-системы от z -системы заключается в том, что при уменьшении периода дискретизации дельта-система стремится к непрерывной системе, в то время как в z -системе этого не происходит. Рассмотрим поведение корней характеристического полинома при стремлении $T \rightarrow 0$:

$$\lim_{T \rightarrow 0} (z_0) = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{1 + \frac{T}{2}s_0}{1 - \frac{T}{2}s_0} = 1, \quad (10)$$

$$\text{тогда как, если принять, что } \Delta = T : \lim_{T \rightarrow 0} (\gamma_0) = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{e^{s_0 T} - 1}{T} = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{s_0 e^{s_0 T}}{1} = s_0 \quad (11)$$

Таким образом, корни характеристического полинома z -системы при $T \rightarrow 0$ стремятся к единице, в то время как корни характеристического полинома дельта-системы стремятся к корням исходной системы. Это свойство с чисто математической точки зрения не дает никаких преимуществ дельта-преобразованию по сравнению с z -преобразованием. Но все меняется, когда мы имеем дело с ограниченной точностью представления данных на вычислительной машине.

Моделирование цифрового интегратора

Так как интегратор является базовым элементом практически любой системы управления [2], то исследование свойств цифрового интегратора на основе дельта-преобразования представляет несомненный интерес.

Для исследования эффекта квантования по уровню коэффициентов передаточных функций нами была разработана модель двухточечного интегратора. Стоит отметить, что использование большего числа точек интегрирования увеличивает задержку в системе, что нежелательно. Рассмотрим в сравнении две модели интегратора: на основе z-преобразования и дельта-преобразования.

Интегратор на основе z-преобразования строится на основе метода трапеций, как наиболее точного из двухточечных. Итерационная формула для вычисления значения интеграла такова:

$$y = \int_{t_0}^{t_1} r(t) dt \approx \sum_{k=1} \frac{T}{2} (r(Tk) + r(Tk - T)) = \sum_{k=1} \frac{T}{2} (r_k + r_{k-1}), \quad (12)$$

где T – период дискретизации. Отсюда следует итерационная формула:

$$y_{k+1} = y_k + T \frac{r_k + r_{k-1}}{2} \quad (13)$$

Перепишем это выражение с использованием оператора сдвига z^{-1} :

$$y_k = z^{-1} y_k + \frac{T}{2} (r_k + z^{-1} r_k) \quad (14)$$

Интегратор на основе дельта-преобразования может быть выведен из формулы (4). В самом деле:

$$z = 1 + \gamma \Delta \Rightarrow z^{-1} = \frac{\gamma^{-1}}{\Delta + \gamma^{-1}} \quad (15)$$

Подставим эту замену в формулу (14):

$$y_k = \frac{\gamma^{-1}}{\Delta + \gamma^{-1}} y_k + \frac{T}{2} r_k + \frac{\gamma^{-1}}{\Delta + \gamma^{-1}} \frac{T}{2} r_k \Rightarrow y_k = \frac{T}{\Delta} \gamma^{-1} r_k + \frac{T}{2} r_k \quad (16)$$

$$\text{Обозначим: } \gamma^{-1} r^k = x^k \quad (17)$$

$$\text{Из (2) и (17) следует: } \gamma(\gamma^{-1} r^k) = r^k = \frac{x^{k+1} - x^k}{\Delta} \quad (18)$$

На основе (16) и (18) легко записать итоговую систему равенств для интегратора на основе дельта-преобразования, построенного по методу трапеций:

$$\begin{cases} x^{k+1} = x^k + \Delta r^k \\ y^k = \frac{T}{\Delta} x^k + \frac{T}{2} r^k \end{cases} \quad (19)$$

Обратим внимание: хотя при выводе выражения (11) предполагалось, что $\Delta = T$, но на практике мы можем выбирать значение Δ , отличное от T . С помощью подбора Δ можно добиться повышения точности вычислений (фактически, Δ играет роль масштабирующего коэффициента) [5]. Подбор Δ – нетривиальная задача оптимизации.

В среде LabVIEW было проведено моделирование цифровых интеграторов, построенных на основе z-преобразования и дельта-преобразования. В качестве входного сигнала была взята синусоида с периодом $T_{\text{sin}} = 1 \text{ сек}$ и амплитудой 1, период дискретизации в системе был принят равным $T = 0,01 \text{ сек}$. Параметр $\Delta = 0,06 \text{ сек}$ (подобран экспериментально). Было создано две модели: для длины слова 16 бит и 32 бита.

Моделирование 16-битного интегратора

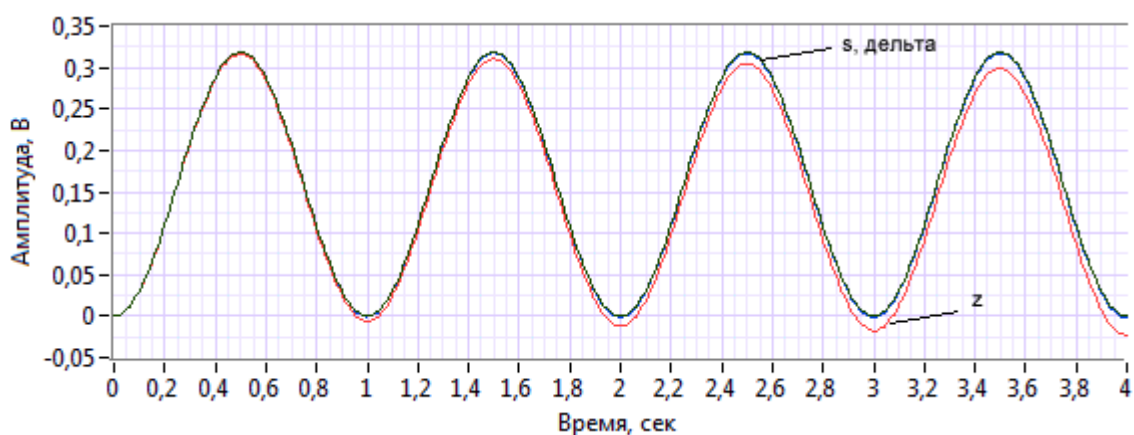


Рисунок 1. Реакция на синусоидальное воздействие 16-битного интегратора

Из рисунка 1 видно, что при 16-битной длине слова z-интегратор накапливает ошибку значительно быстрее, чем дельта-интегратор. Более детально это можно видеть на графике ошибки.

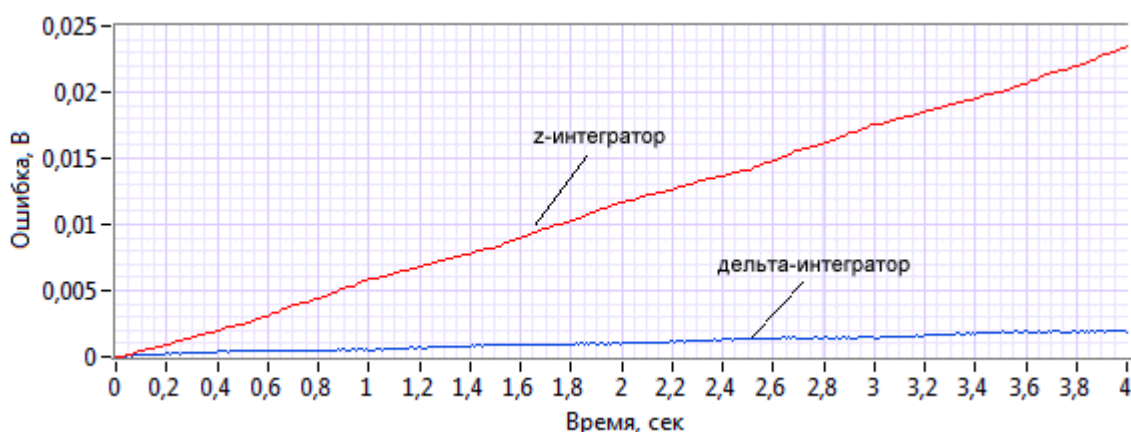


Рисунок 2. Ошибка 16-битного интегратора в различных реализациях

Данные линии визуально кажутся прямыми, хотя известно, что для синусоидального сигнала ошибка интегратора по методу трапеций должна повторять гармонику. При

увеличении масштаба становится видно, что в данном случае это правило не нарушается (рис. 3). Внешний вид погрешности обусловлен наличием инструментальной составляющей.

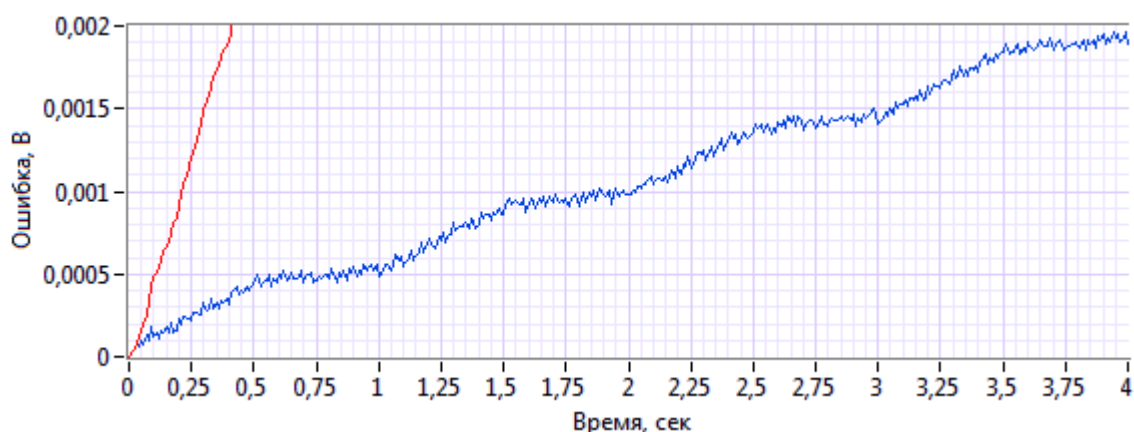


Рисунок 3. Ошибка 16-битного интегратора на основе дельта-преобразования (возрастающая синусоида)

Пилообразный шум возникает из-за ошибки округления [1]. Из приведенных графиков видно, что за 4 секунды работы накопленная ошибка 16-битного z-интегратора более чем на порядок превосходит ошибку дельта-интегратора.

Моделирование 32-битного интегратора

Ниже представлен график ошибки 32-битного интегратора для двух реализаций интегратора.

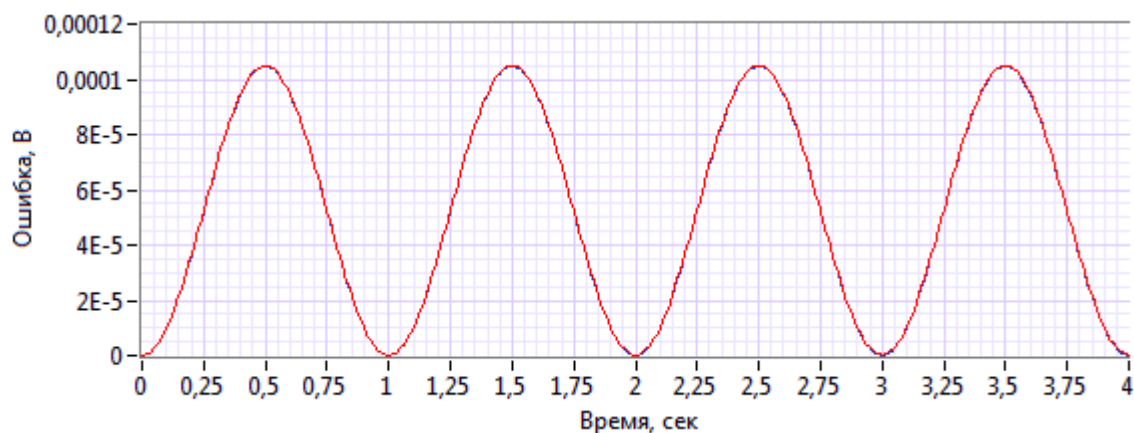


Рисунок 4. Ошибка 32-битного интегратора

На этом графике разница между ошибками z-интегратора и дельта-интегратора неразличима. Однако, сравнивая с ошибкой 16-битного интегратора (рисунок 2), видно: она меньше всего лишь на порядок для дельта-преобразования. Очевидно, что, увеличивая разрядность контроллера до 32-х бит, было бы целесообразно получить и значительно лучшую точность. Изменим условия эксперимента. Примем период дискретизации $T = 0,001 \text{ сек}$, а параметр $\Delta = 0,006 \text{ сек}$

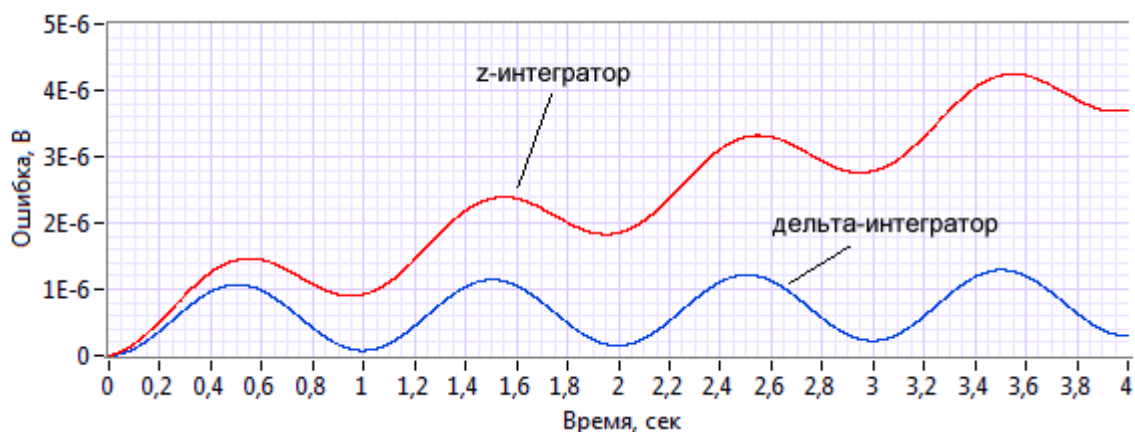


Рисунок 5. Ошибка 32-битного интегратора в различных реализациях при периоде дискретизации $T = 0,001$ сек

На графике (рисунок 5) видно, что накопленная ошибка z-интегратора растет значительно быстрее, чем ошибка дельта-интегратора.

Из сравнения графиков на рисунках 2 и 5 можно вывести следующую грубую оценку:

- при длине слова 16 бит накопленная ошибка z-интегратора достигает 0,025 (7,5 %) за 4 секунды. За это же время ошибка дельта-интегратора не превышает 0,002 (0,6 %);
- при длине слова 32 бит накопленная ошибка достигает $4 \cdot 10^{-6}$ (0,01 %) за 4 секунды. За это же время ошибка дельта-интегратора не превышает $4 \cdot 10^{-7}$ (0,001 %).

Заключение

Показано преимущество использования дельта-преобразования перед z-преобразованием при реализации цифрового интегратора в случае представления чисел с фиксированной точкой при ограниченной длине машинного слова, что позволяет увеличить точность численного интегрирования. Это правило верно как для 16-битного, так и для 32-битного представления чисел с фиксированной точкой, свойственного подавляющему большинству современных микроконтроллеров и цифровых сигнальных процессоров. По этой причине представляется оправданным отдавать предпочтение дельта-преобразованию при реализации цифровых систем.

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ в рамках Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009–2013 годы» (Государственный контракт № 14.В37.21.2021 от 11 ноября 2012 г.).

Список литературы

1. Бутусов Д. Н., Жуков К. Г. Коррекция погрешности решения дифференциальных уравнений второго порядка // Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. – 2010. – № 6 (113). – С. 121-126.

2. Бутусов Д. Н., Жуков К. Г. Анализ и коррекция погрешности цифровых интеграторов встраиваемых систем управления / «Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. – СПбГПУ, 2009. – № 6. – С. 17-25.
3. Ту Ю. Цифровые и импульсные системы автоматического управления. – М.: Машиностроение, 1964.
4. Development of the RX Family – Driven by key embedded-system design issues / Renesas Electronics Corporation 2010-2012. – URL: <http://hk.renesas.com/products/mpumcu/rx/child/background.jsp> (дата обращения: 4 декабря 2012).
5. Newman M. J., Holmes D. G. Delta operator digital filter for high performance inverter applications // IEEE Transactions on Power Electronics. – 2003. – Vol.18. – No.1. – Part 2.

Рецензенты:

Куприянов Михаил Степанович, д.т.н., профессор кафедры вычислительной техники. Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В. И. Ульянова (Ленина)», г. Санкт-Петербург.

Фахми Шакиб Субхиевич, д.т.н., доцент кафедры систем автоматизированного проектирования. Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В. И. Ульянова (Ленина)», г. Санкт-Петербург.