УДК 004.942

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРОЦЕССА ОБЖИГА ВО ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ПЕЧИ В УСЛОВИЯХ ИНТЕРВАЛЬНОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ИСХОДНЫХ ДАННЫХ

Туляков Д.С.

ФГБОУ ВПО «Тамбовский государственный технический университет», Тамбов, Россия (392000, г. Тамбов, ул. Советская, 106), e-mail: unrealler@yandex.ru

Предложен подход к раскрытию неопределенностей в математических моделях. Данный подход основан на теории интервального анализа. Показана методика решения интервальной математической модели для класса статических математических моделей с распределенными параметрами. Реализация данной методики продемонстрирована на примере процесса обжига во вращающейся печи, в которой информация о некоторых исходных данных задавалась в виде интервальных чисел. Таким образом, нахождение технологических режимов функционирования вращающихся печей, которые обеспечивают стабильное ведение процесса и качество получаемого продукта, представляет актуальную задачу. Поставлена задача ведения технологического процесса и показано распределение температуры материала по длине печи в виде нижней и верхней границы допустимых значений. Данная методика позволяет гарантированно вычислять интервал выходных значений математических моделей, что дает преимущества перед другими способами раскрытия неопределенностей в математических моделях.

Ключевые слова и фразы: интервал, математическая модель, границы, вращающаяся печь, распределение температур.

MATHEMATICAL MODEL OF THE BURNING PROCESS IN A ROTARY FURNACE UNDER INTERVAL UNCERTAINTY OF INITIAL DATA

Tulyakov D.S.

Tambov State Technical University, Tambov, Russia (392000, Tambov, Sovetskaya street, 106), e-mail: unrealler@yandex.ru

An approach to the disclosure of uncertainty in mathematical models, based on the theory of interval analysis, in which information about the importance of uncertain parameters given in the form of interval numbers. It is shown how the solution of interval mathematical model for the class of static mathematical models with distributed parameters. The implementation of this technique is demonstrated by the firing process in a rotary furnace. Rotary furnace are used for various purposes, such as sintering of batches in the production of alumina, obtaining cement clinker hydrated materials, obtaining iron or non-ferrous alloys, and more. Thus, the finding of technological modes of operation of rotary furnaces, which provide stable maintenance of the process and the quality of the product, is the actual problem. The task of the process and shows the temperature distribution of the material along the length of the furnace in the form of lower and upper boundaries of acceptable values.

Key words and phrases: interval, mathematical model, borders, rotary furnace, temperature distribution.

При построении математических моделей нередко возникают случаи, когда некоторые входные величины не определены и найти их численные значения не представляется возможным. Существует несколько подходов к раскрытию неопределенностей.

Известно несколько подходов к раскрытию неопределенностей. Широко используется вероятностный подход [1], в котором неопределенные параметры характеризуются функциями плотности распределения. Математические модели, в состав которых входят такие параметры, имеют названия вероятностных. В этом случае функции распределения строятся на основании накопленных статистических данных о поведении стохастических параметров. Трудность применяемой методики связана с необходимостью проведения большого числа экспериментов на объекте во время хода технологического процесса для определения параметров законов распределения стохастических величин.

Другой подход связан с использованием теории нечетких множеств [4] и уходит в сферу субъективной информации. Неопределенные параметры характеризуются функциями принадлежности, которые строятся на основе опросов экспертов. Модели, в которых неопределенные параметры характеризуются функциями принадлежности, получили название нечетких математических моделей. Недостатком этой методики является то, что для надежного построения функции принадлежности требуется мнение нескольких экспертов. Это не всегда возможно.

На практике чаще всего информация о значении неопределенного параметра v_i задается в виде интервального параметра [2] (интервального числа):

$$[v_i] = [\underline{v_i} \le v_i \le \overline{v_i}, \underline{v_i} \le \overline{v_i}] = [\underline{v_i}, \overline{v_i}] \equiv \mathrm{mid}\,[v_i] \pm \frac{\Delta_i}{2}, i = \overline{1, p},$$

где $\underline{v_i}, \overline{v_i}$ – нижняя и верхняя граница параметра v_i; $\mathrm{mid}\,[v_i]$ – середина интервала $[v_i]$ (рис. 1):

$$\mathrm{mid}\,[v_i] = (\underline{v_i} + \overline{v_i})/2; \tag{1}$$

величина Δ_i – есть интервал, который определяется:

$$\Delta_i = \overline{v_i} - \underline{v_i}. \tag{2}$$

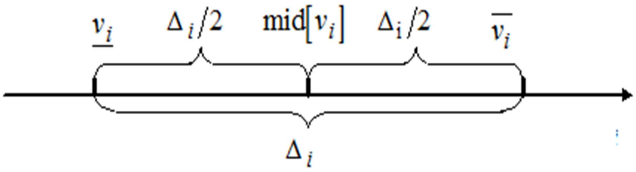

Рис. 1. Изображение интервального параметра $[v_i]$ на числовой прямой.

Рассмотрим интервальную теорию на примере класса статических математических моделей с распределенными параметрами [5], которые определяются уравнениями вида:

$$\forall v \in [v]: \mathrm{M}(y'(z), y(z), u, x, v, z) = 0, \tag{3}$$

где z – пространственная координата объекта.

На первом этапе исследования зависимости $y_j(z) = y_j(z)(v_i)$, $i = \overline{1,p}$, $j = \overline{1,m}$, $z \in [0, Z]$ определяется правило вычисления границ $\underline{y_j(z)}, \overline{y_j(z)}$. В процессе исследования (рис. 2) для каждого $v_{i(k)}$ $\left(v_{i(k)_i} \in [v_i], k=\overline{1,\mathrm{K}_i}, v_{i(k+1)} - v_{i(k)} = \Delta h\right)$ строятся зависимости $y_{kj}(z) = y_{kj}(z)\left(v_{i(k)}\right)$.

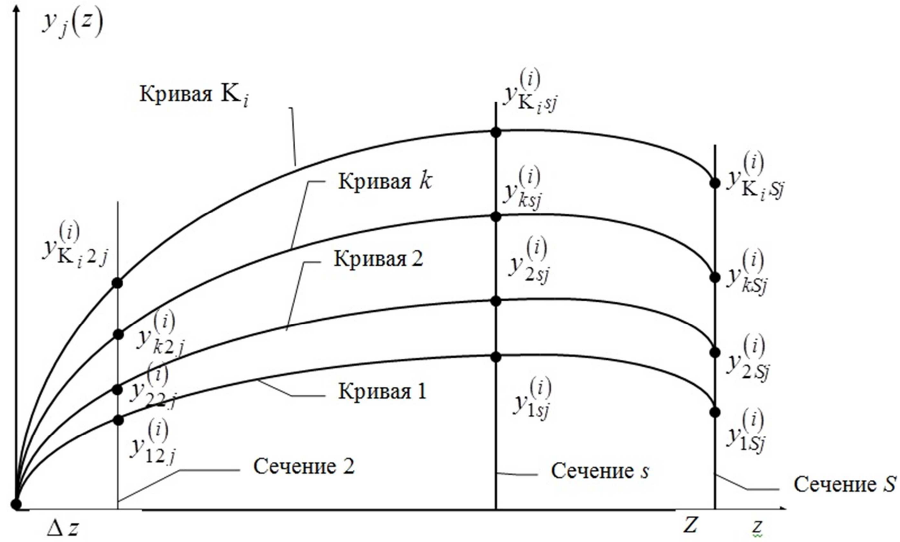

Рис. 2. Построение последовательностей $\left\{y^{(i)}_{1sj}, y^{(i)}_{2sj}, \ldots, y^{(i)}_{ksj}, \ldots, y^{(i)}_{\mathrm{K}_i sj},\right\}$ при исследовании зависимости $y_j(z)^{(i)}$.

Далее по пространственной координате z объекта с шагом Δz определяются точки $z_1, z_2, .., z_s, .., z_S$. В результате образуются последовательности:

$$\left\{y^{(i)}_{11j}, y^{(i)}_{21j}, \ldots, y^{(i)}_{k1j}, \ldots, y^{(i)}_{\mathrm{K}_i 1j},\right\}, \ldots, \left\{y^{(i)}_{1sj}, y^{(i)}_{2sj}, \ldots, y^{(i)}_{ksj}, \ldots, y^{(i)}_{\mathrm{K}_i sj},\right\}, \ldots,$$

$$\left\{y^{(i)}_{1Sj}, y^{(i)}_{2Sj}, \ldots, y^{(i)}_{kSj}, \ldots, y^{(i)}_{\mathrm{K}_i Sj},\right\}, \tag{4}$$

где первый подстрочный индекс означает номер кривой (на рис. 2 кривая $y_{kj}(z)$ обозначается как кривая 1, кривая 2, ..., кривая k, ...,); второй подстрочный индекс соответствует номеру линии, обозначаемой как сечение $s\left(s=\overline{1,S}\right)$, на которой лежит точка $y^{(i)}_{ksj}$; третий индекс соответствует номеру выходного параметра y_j.

Если для заданного i все S последовательностей (4) являются монотонными, тогда $i \in L_j$ (рис. 3а). В этом случае нижние и верхние границы определяются соответственно:

$$\underline{y_j}^{(i)}(z) = y_j(z)\left(\hat{\underline{v}}_i\right), \tag{5}$$

$$\overline{y_j}^{(i)}(z) = y_j(z)\left(\hat{\overline{v}}_i\right). \tag{6}$$

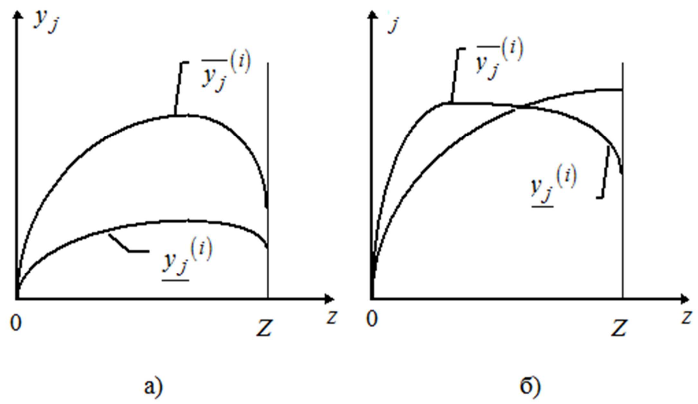

Рис. 3. К определению границ интервала $[y_j(z)]$ для зависимости

$y_j(z)^{(i)} = y_j(z)(v_i),(v_i \in [v_i])$ при $i \in L_j$ (а); при $i \notin L_j$ (б).

Если хотя бы одна из $s\left(s=\overline{1,S}\right)$ последовательностей является немонотонной, тогда $i \notin L_j$ (рис. 3б).

На втором этапе определяется значимость интервала Δ_i для выходной переменной $y_j(z)^{(i)}$, согласно неравенству:

$$\max_z \left|\overline{y_j}(z)^{(i)} - \underline{y_j}(z)^{(i)}\right| \geq \varepsilon_j^i . \quad (7)$$

Здесь $\overline{y_j}(z)^{(i)}$, $\underline{y_j}(z)^{(i)}$ определяются из (14-5), (15-6), если $i \in L_j$. В противном случае из решений задач оптимизации $\overline{y_j}(z)^{(i)} = \arg\max\limits_{v_i \in [v_i]} y_j(z)$, $\underline{y_j}(z)^{(i)} = \arg\min\limits_{v_i \in [v_i]} y_j(z)$.

Если условие (7) не выполняется, то интервал Δ_i для $y_j(z)$ считается незначимым и при определении $\underline{y_j}(z)$, $\overline{y_j}(z)$ задается в виде точки со значением $\mathrm{mid}[v_i], i \in N_j$.

После проведенных исследований интервальный выходной параметр $[y_j(z)]$ определяется по формуле:

$$[y_j(z)] = \begin{bmatrix} \min\limits_{\substack{v_i \in [v_i] \\ \forall i \in G_j}} \left\{ y_j(z) \middle| \mathrm{M}\left(y'(z), y(z), u, x, v_i, \mathrm{mid}[v_l], \underline{\hat{v}_k}, z\right) = 0 \right\}, \\ \max\limits_{\substack{v_i \in [v_i] \\ \forall i \in G_j}} \left\{ y_j(z) \middle| \mathrm{M}\left(y'(z), y(z), u, x, v_i, \mathrm{mid}[v_l], \hat{\overline{v}}_k, z\right) = 0 \right\} \end{bmatrix}, \quad (8)$$

$$z \in [0, Z], \; G_j = F \setminus \left(N_j \cup L_j\right),$$

$$l \in N_j, \; k \in L_j, \; j = \overline{1,m}.$$

Таким образом, представленная методика позволяет найти выходные параметры интервальной модели, которые определяются верхней и нижней границей выходного параметра.

Данная методика реализована на примере процесса обжига во вращающейся печи. Вращающаяся печь – это промышленная печь цилиндрической формы с вращательным движением вокруг продольной оси, предназначенная для нагрева материалов с целью их физико-химической обработки. Для поддержания температурного режима применяется факельное сжигание природного газа. Материал в печи движется противотоком продуктам сгорания [3].

Нами разработана математическая модель процесса обжига во вращающейся печи [6]:

$$\frac{dT_м}{dl} = \frac{\varepsilon_м \sigma_0 (T_Г^4 - T_м^4)\pi d\Delta l - \dfrac{2\pi(T_м - T_{ст})\Delta l}{\dfrac{1}{\lambda}\ln\dfrac{D}{d}}}{\theta_м G_м}, \tag{9}$$

$$\frac{dT_Г}{dl} = \frac{\varepsilon_м \sigma_0 (T_Г^4 - T_м^4)\pi d\Delta l - 2mG_T \Omega e^{-m(L-l)^2}(L-l)}{\theta_Г G_Г}, \tag{10}$$

$$\frac{2\pi(T_м - T_{ст})\Delta l}{\dfrac{1}{\lambda}\ln\dfrac{D}{d}} = \varepsilon_{ст} \sigma_0 (T_{ст}^4 - T_{ср}^4)\pi D\Delta l, \tag{11}$$

$$T_м |_{l=0} = T_м^{вх}, \tag{12}$$

$$T_Г |_{l=\mathrm{L}} = T_Г^{вых}, \tag{13}$$

где $T_м$ – температура материала [К], $T_Г$ – температура газа [К], $T_{ст}$ – температура стенки [К], $T_{ср}$ – температура среды [К], l – текущая длина печи [м], $\varepsilon_{ст}$ – степень черноты футеровки, $\varepsilon_м$ – степень черноты материала, d – внутренний диаметр печи [м], D – внешний диаметр печи [м], L – общая длина печи [м], σ_0 – коэффициент излучения абсолютно черного тела [Вт/м^{2}К^4], λ – коэффициент теплопроводности материала футеровки [Вт/мК], Ω – тепло, выделяющееся от сгорания 1 кг топлива (удельная теплота сгорания) [Дж/кг], $\theta_м$ – теплоемкость материала [Дж/кг°С], $\theta_Г$ – теплоемкость газа [Дж/кг°С], $G_м$ – расход материала [кг/с], $G_Г$ – расход газа [м^3/с], G_T – расход топлива [м^3/с], m – эмпирический коэффициент.

В данной математической модели есть неопределенные параметры, численные значения которых изначально неизвестны. Это степень черноты материала $\varepsilon_м$, теплоемкость материала $\theta_м$ и длина факела $l_ф$. Эмпирический коэффициент m зависит от длины факела, следовательно, изменение длины факела влечет за собой изменение данного эмпирического коэффициента.

Математическая модель процесса обжига во вращающейся печи относится к классу статических моделей с распределенными параметрами.

Для успешного ведения технологического процесса необходимо обеспечить заданную температуру материала в определенных точках в каждой печи. В условиях неопределенности параметров математической модели постановка задачи обеспечения заданного технологического режима формулируется следующим образом: для заданных условий окружающей среды $T_{ср}$, производительности установки $G_м$ необходимо найти расход топлива G_T, при которых достигается выполнение технологических условий производства, т.е. интервал значения температуры на заданной длине печи должен быть подмножеством интервала температуры, заданного технологом:

$$[\underline{T^*_{м1}}, \overline{T^*_{м1}}] \subset [\underline{T^з_{м1}}, \overline{T^з_{м1}}], [\underline{T^*_{м2}}, \overline{T^*_{м2}}] \subset [\underline{T^з_{м2}}, \overline{T^з_{м2}}].$$

На первом этапе необходимо задать границы интервалов для неопределенных параметров: $[\varepsilon_м]=[0.3,\ 0.7]$; $[\theta_м]=[1000,\ 1200]$; $[l_ф]=[7,\ 15]$. В данных математических моделях выходными параметрами являются распределение температур газа, материала и стенки по длине печи, но наиболее важный параметр для процесса обжига – это температура материала, следовательно, все расчеты проведем только для температуры материала.

Далее необходимо построить последовательности (4). Строится график зависимости степени черноты материала равной 0.3 от всех остальных интервальных величин, и из них находим верхнюю и нижнюю границу (рис. 4).

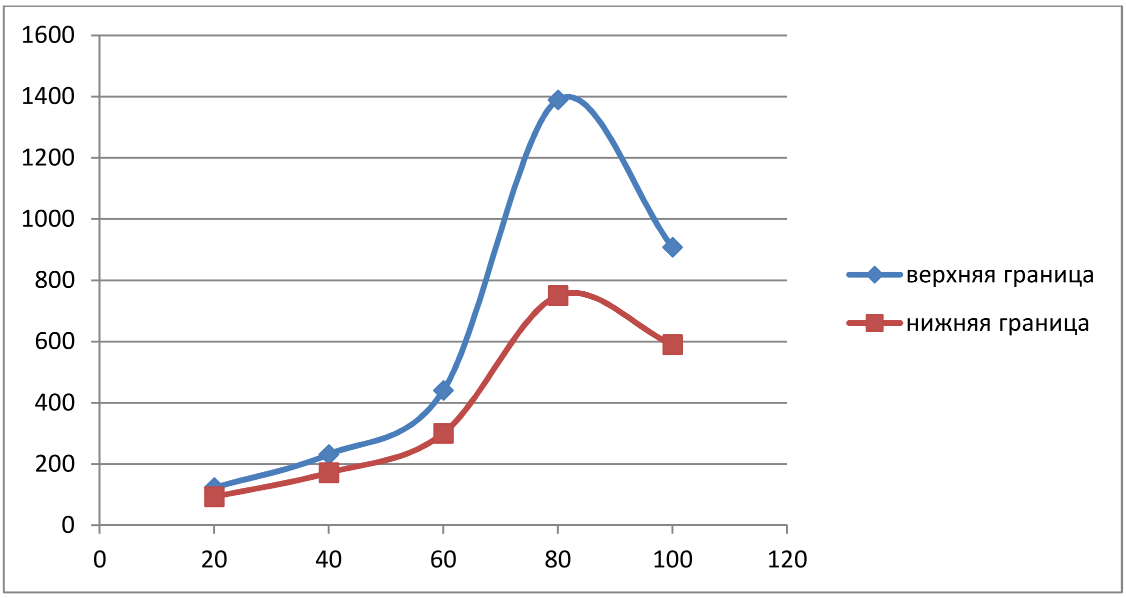

Рис. 4. $\underline{y_j}(z), \overline{y_j(z)}$ **для** $[\varepsilon_м]$**=0.3.**

Аналогично строим зависимости для $[\varepsilon_м]$=0.4; $[\varepsilon_м]$=0.5; $[\varepsilon_м]$=0.6; $[\varepsilon_м]$=0.7.

После проведенных исследований находим верхнюю и нижнюю границу для всего интервала $\lfloor y_j(z) \rfloor$ (рис. 5).

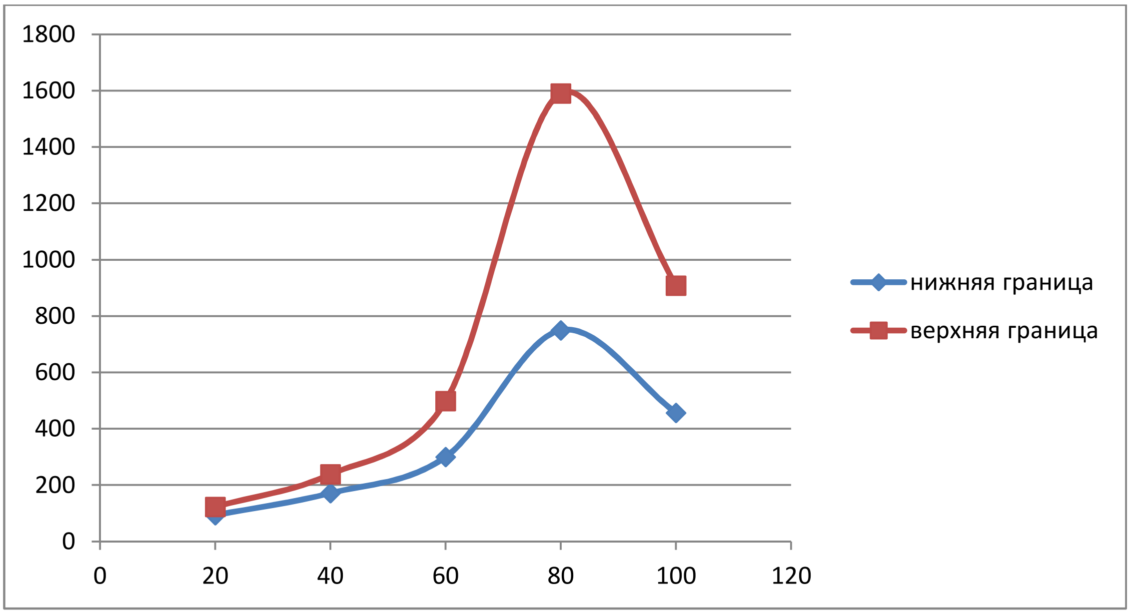

Рис. 5. Границы интервала $\lfloor y_j(z) \rfloor$ **для противотока.**

Как видно из рис. 5, распределение температуры материала находится в области между верхней и нижней границами.

Далее определяется значимость интервала Δ_i для выходной переменной, согласно неравенству (7). Параметр ε_j^i – это допустимая погрешность, значение которой задается технологом. В данном случае погрешность составляет 3°С. Как видно из рис. 9, интервал Δ_i является значимым.

Следовательно, данная методика позволяет гарантированно вычислять интервал выходных значений математических моделей, что дает преимущества перед другими способами раскрытия неопределенностей в математических моделях.

Список литературы

1. Алон Н. Вероятностный метод / Н. Алон, Дж. Спенсер. – М. : Бином. Лаборатория знаний, 2007. – 320 с.

2. Добронец Б.С. Интервальная математика. – Красноярск, 2004. – 219 с.

3. Лисиенко В.Г. Вращающиеся печи: теплотехника, управление и экология : справочное издание: в 2-х книгах / В.Г. Лисиенко, Я.М. Щелоков, М.Г. Ладыгичев. – М. : Теплотехник, 2004. – Кн. 2. – 592 с.
4. Новак В. Математические принципы нечеткой логики / В. Новак, И. Перфильева, И. Мочкрож. – М. : Физматлит, 2006. – 352 с.
5. Фролов С.В. Решение интервальных математических моделей технологических процессов. / Т.А. Фролова, Д.С. Туляков // Наука и образование. Инженерное образование. – 2012. – № 9. – URL: http://technomag.edu.ru/doc/454499.
6. Фролова Т.А. Математическое моделирование процесса обжига во вращающихся печах / Т.А. Фролова, Д.С. Туляков // Информатика: проблемы, методология, технология : материалы XII Междунар. науч.-метод. конференции. – Воронеж, 2012. – С. 424.

Рецензенты:

Туголуков Евгений Николаевич, д.т.н., профессор кафедры «Техника и технологии производства нанопродуктов» ФГБОУ ВПО «Тамбовский государственный технический университет», г. Тамбов.

Борщев Вячеслав Яковлевич, д.т.н., профессор, зав. кафедрой «Техносферная безопасность» ФГБОУ ВПО «Тамбовский государственный технический университет», г. Тамбов.