УДК 519.254

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К ВЫЧИСЛЕНИЮ ИНДЕКСА ХЕРСТА ФИНАНСОВЫХ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ И ИХ АППРОКСИМАЦИИ ФРАКТАЛЬНЫМ БРОУНОВСКИМ ДВИЖЕНИЕМ

Чичаев И.А.[1], Попов В.Ю.[1]

[1]*Федеральное государственное образовательное бюджетное учреждение высшего профессионального образования «Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации» (Финансовый университет), Москва, Россия (125993, г. Москва, Ленинградский проспект, 49), e-mail:* iliyachichaev@gmail.com

Распределение такого рода статистических данных, как финансовые временные ряды, всегда неизвестно, поэтому кажется удобным и целесообразным аппроксимировать их значениями некоторого процесса с известными характеристиками. Во многих ситуациях таким аппроксимирующим процессом является фрактальное броуновское движение (ФБД). Так как это параметрическое семейство распределений, то нужно подобрать подходящий аппроксимирующий процесс. Поэтому с использованием языка программирования C++ и системы Matlab было разработано новое компьютерное приложение для численного подсчета индекса Херста временного ряда в режиме реального времени, приведены результаты его тестов как на модельных, так и на реальных финансовых данных. Кроме того, описан процесс численного моделирования траекторий фрактального броуновского движения с заданным индексом Херста, который также был реализован в виде компьютерного приложения.

Ключевые слова: временной ряд, индекс Херста, фрактальное броуновское движение, финансовый индекс.

ABOUT ONE APPROACH FOR FINANCIAL TIME SERIES' HURST INDEX COMPUTATION AND THEIR APPROXIMATION USING FRACTAL BROWNIAN MOTION

Chichaev I.A.[1], Popov V. Y.[1]

[1]*Finance University under the Government of the Russian Federation, Moscow, Russia (125993, Moscow, Leningrad avenue, 49), e-mail:* iliyachichaev@gmail.com

Distribution of statistical data sets like financial time series is usually unknown, so it seems to be appropriate and useful to approximate them with some well known process. In many situations role of such approximating process can be played by fractal brownian motion (FBM). This is parametrical family of distributions, that's why we have to find appropriate approximate process. So using C++ programming language and Matlab system new computer application was developed for data Hurst index computing in real-time, this article consists results of its tests on model and real data. Moreover, process of numerical modeling of FBM trajectories (with given Hurst index) is described. This process also was implemented as a computer application.

Key words: time series, Hurst index, fractal brownian motion, financial index.

Введение

В статье пойдет речь о некоторых фрактальных свойствах случайных процессов. Будет также описан алгоритм вычисления одной из главных фрактальных характеристик временного ряда – индекса Херста. Поскольку все изложенное ниже будет касаться некоторого класса случайных процессов, дадим необходимые определения и теоретические сведения.

Определение 1. Случайный процесс $(X_t)_{t\geq 0}$ с действительными значениями будем называеть *автомодельным*, если $\forall\, a > 0\ \exists\, b > 0$, такое что

$$Law(X_{at}, t \geq 0) = Law(bX_t, t \geq 0) \qquad (1)$$

(здесь Law обозначает закон распределения случайной величины).

Менее формально, данное определение говорит о том, что следующие два преобразования эквивалентны: $t \to at$ и $x \to bx$.

Определение 2. Если в первом определении для любого $\forall\, a > 0$ выполняется соотношение $b = a^H$, то случайный процесс $(X_t)_{t \geq 0}$ назовем автомодельным с показателем Херста **H**.

Классическим примером такого процесса является фрактальное броуновское движение. Введем следующую функцию:

$$A(s,t) = |s|^{2\boldsymbol{H}} + |t|^{2\boldsymbol{H}} - |t-s|^{2\boldsymbol{H}},\ s,t \geq 0. \tag{2}$$

Нетрудно доказать свойство ее неотрицательной определенности при $0 < \boldsymbol{H} \leq 1$, откуда следует, что существует некоторое вероятностное пространство и на нем гауссовский процесс с нулевым средним и ковариационной функцией

$$Cov(X_s, X_t) = \frac{1}{2}A(s,t),$$

другими словами,

$$E[X_s, X_t] = \frac{1}{2}(|s|^{2\boldsymbol{H}} + |t|^{2\boldsymbol{H}} - |t-s|^{2\boldsymbol{H}}). \tag{3}$$

Тогда имеем

$$E[X_{as}, X_{at}] = a^{2\boldsymbol{H}}E[X_s, X_t] = E[a^{\boldsymbol{H}}X_s, a^{\boldsymbol{H}}X_t],$$

поэтому

$$Law(X_{as}, X_{at}) = Law(a^{\boldsymbol{H}}X_s, a^{\boldsymbol{H}}X_t).$$

То есть видим, что процесс X удовлетворяет свойству автомодельного (с показателем Херста **H**).

Итак, гауссовский процесс $X = (X_t)_{t \geq 0}$ с непрерывными траекториями, ковариационной функцией (3) и $EX_t = 0$ называется фрактальным броуновским движением (с показателем Херста $0 < \boldsymbol{H} \leq 1$). В дальнейшем будем обозначать его $B_H = (B_H(t))_{t \geq 0}$. Фрактальное броуновское движение является процессом со стационарными приращениями. Как показано выше, фрактальное броуновское движение является автомодельным случайным процессом.

При $\boldsymbol{H} = \frac{1}{2}$ фрактальное броуновское движение вырождается в стандартный винеровский процесс.

По аналогии с белым гауссовским шумом рассмотрим фрактальный гауссовский шум с параметром Херста **H**, $0 < \boldsymbol{H} \leq 1$:

$$\beta_{\boldsymbol{H}}(n) = B_{\boldsymbol{H}}(n) - B_{\boldsymbol{H}}(n-1),\ n \geq 1, \tag{4}$$

Из (3) нетрудно получить ковариационную функцию фрактального шума:

$$\rho_{\boldsymbol{H}}(n) = \frac{1}{2}(|n+1|^{2\boldsymbol{H}} - 2|n|^{2\boldsymbol{H}} + |n-1|^{2\boldsymbol{H}}). \tag{5}$$

При $n \to \infty$ имеем:

$$\rho_{\boldsymbol{H}}(n) \to \boldsymbol{H}(2\boldsymbol{H}-1)|n|^{2\boldsymbol{H}-\boldsymbol{2}}. \tag{6}$$

В случае $\boldsymbol{H} = \frac{1}{2}$ ковариация равна нулю для ненулевых n, и фрактальный шум есть не что иное, как последовательность независимых гауссовских случайных величин. Если же индекс Херста отличен от 1/2, то из имеем положительную ковариацию при $1/2 < \boldsymbol{H} \leq 1$ и отрицательную при $0 < \boldsymbol{H} < 1/2$. Это свойство довольно важно, поскольку часто анализ проводится в прогностических целях.

М.М. Дубовиков, Н.В. Старченко и М.С. Дубовиков в своей статье [3] предлагают алгоритм построения оценки индекса Херста процесса X_t. Индекс вычисляется по значениям процесса в дискретных точках в «скользящем» окне размером, например, 32 точки. Для каждого $\delta = 2^k, k = 0,1,\dots,5$ вычисляется среднее значение приращения функции:

$$< |X(t+\delta) - X(t)| >= \frac{\delta}{32} \sum_{i=1}^{32/\delta} |X(t_{i+1}) - X(t_i)|,$$

где $t_{i+1} = t_i + \delta$.

Известно, что $< |X(t+\delta) - X(t)| > \sim\delta^{\boldsymbol{H}}$ при $\delta \to 0$, поэтому, рассчитав для каждого $\delta = 2^k, k = 0,1,\dots,5$ величины $y = \ln(< |X(t+\delta) - X(t)| >)$ и $x = \ln(\delta)$, методом наименьших квадратов проводим наименее удаленную от них прямую: $y = ax + b$, угловой коэффициент которой и является оценкой индекса Херста (согласно приведенной выше асимптотической формуле). На реальных (быть может, зашумленных) данных при проведении наилучшей прямой через все точки зависимость индекса Херста от времени (при движении «скользящего» окна) получается очень негладкой (из-за шумов, зачастую содержащихся в концевых точках). Поэтому было принято решение проводить прямую через такие 3 или 4 точки, для которых сумма квадратов отклонений точек от прямой минимально среди всевозможных комбинаций.

С использованием указанного модернизированного алгоритма была написана компьютерная программа (с использованием языка С++ и пакета Matlab), вычисляющая индекс Херста для различных размеров «скользящего» окна. Ниже представлен пример результата ее работы – сгенерированный график индекса Херста стандартного броуновского движения.

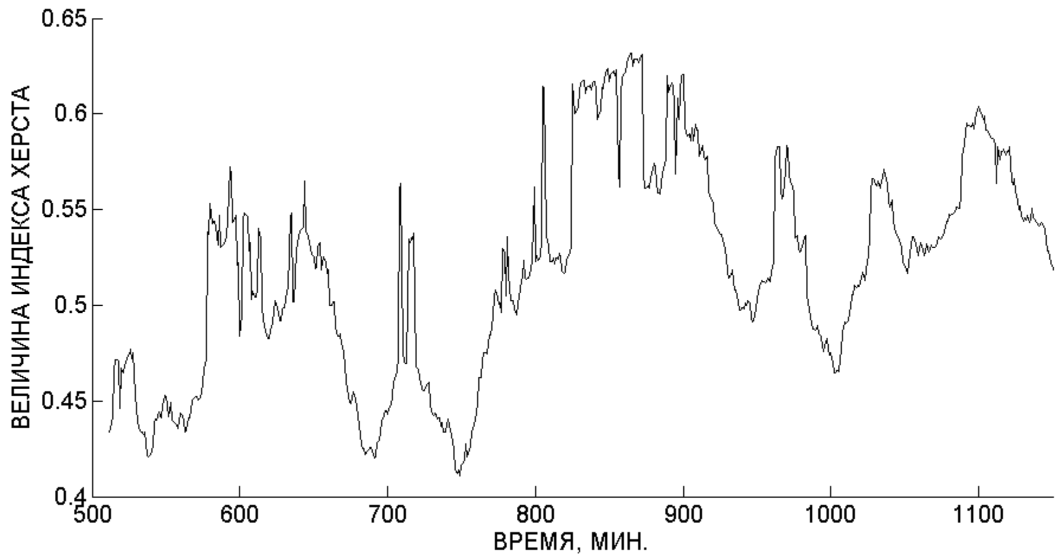

Рис. 1. Индекс Херста стандартного броуновского движения.

Описанный алгоритм был также применен к финансовым временным рядам. Ниже показан график индекса Херста для индекса NASDAQ за некоторый промежуток 2012 года, по которому можно судить, что процесс ведет себя как фрактальное броуновское движение с $H \approx 0.65$.

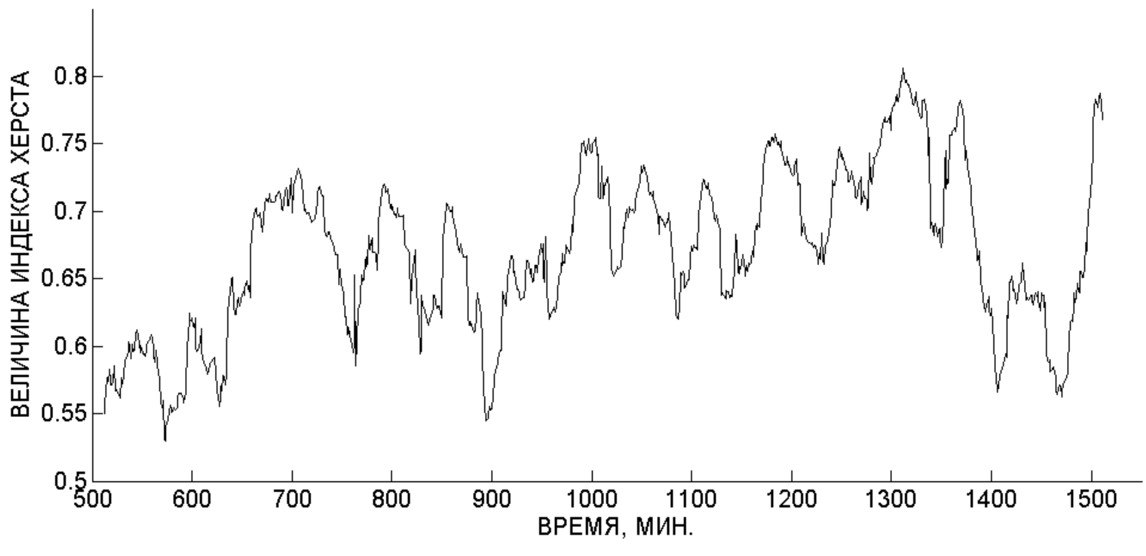

Рис. 2. Индекс Херста индекса NASDAQ.

Приведем также график для индекса RTSI, который показывают большую хаотичность по сравнению с фрактальным броуновским движением.

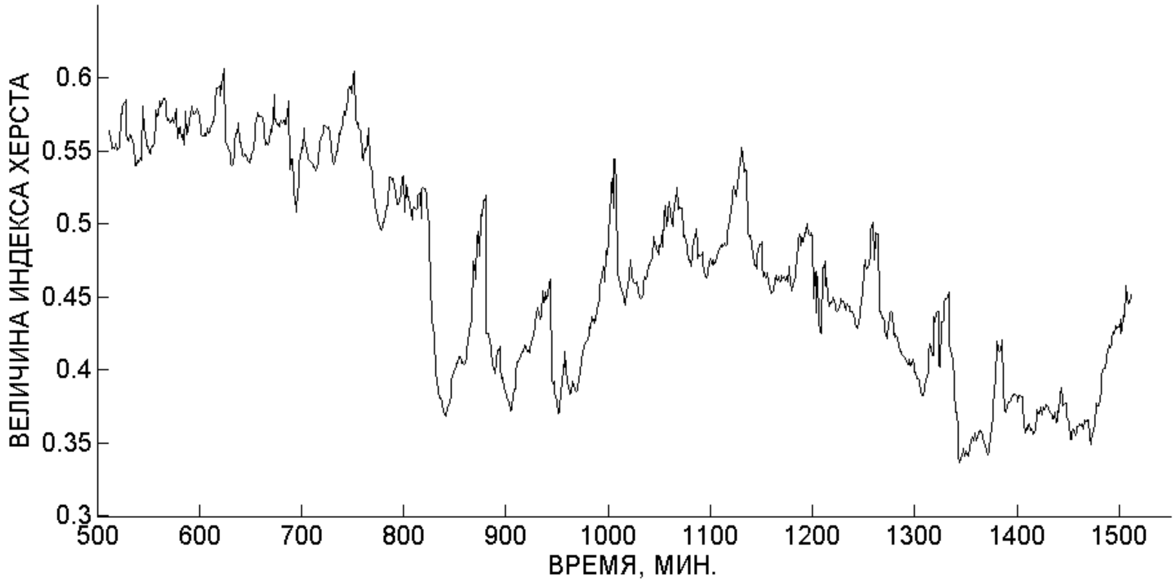

Рис. 3. Индекс Херста индекса RTSI.

Учитывая среднеквадратичное отклонение значений индекса Херста для фрактального броуновского движения, можно сформулировать следующее правило для произвольного процесса: если полученный график лежит в полосе $[H-0.1, H+0.1]$, где H – среднее значение индекса Херста на исследуемом отрезке, то можно говорить о локальном «поведении» случайного процесса, идентичном фрактальному броуновскому движению с соответствующим индексом Херста. Таким образом, ряд из значений индекса NASDAQ может быть аппроксимирован траекторией фрактального броуновского движения с $H \approx 0.65$, однако подобная аппроксимация неприемлема для индекса RTSI.

Теперь рассмотрим один из способов моделирования фрактального броуновского движения с дискретным временем $B_H(n)$. Согласно формуле (5) его можно представить в виде:

$$B_H(n) = \sum_{k=1}^{n} \beta(k). \qquad (7)$$

Для практического моделирования ФБД по формуле (7) рассмотрим такую оценку фрактального гауссовского шума:

$$\hat{\beta}_N(n) = \sum_{k=1}^{N} e^{i\lambda_k n} V_k, \qquad (8)$$

где V_k – независимые гауссовские случайные величины с дисперсией σ_k^2 и нулевым средним (в общем случае комплекснозначные).

Определим дисперсии σ_k^2:

$$\sigma_k^2 = \int_{\lambda_{k-1}}^{\lambda_k} f_{\boldsymbol{H}}(w)dw \approx f_{\boldsymbol{H}}(\lambda_k)(\lambda_k - \lambda_{k-1}), \tag{9}$$

$$-\pi = \lambda_0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_{N-1} < \lambda_N = \pi,$$

где

$$f_{\boldsymbol{H}}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{i\lambda n} \rho_{\boldsymbol{H}}(k) \tag{10}$$

- спектральная плотность (в формуле выше $\rho_{\boldsymbol{H}}(k)$ определяется из (5)).

После некоторых простых преобразований получим:

$$= \frac{1}{2\pi}\{1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} \cos(\lambda k)\rho_{\boldsymbol{H}}(k)\}. \tag{11}$$

Рассмотрим следующую оценку $f_{\boldsymbol{H}}(\lambda)$:

$$\hat{f}_{\boldsymbol{H}}(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\{1 + 2\sum_{k=1}^{L} \cos(\lambda k)\rho_{\boldsymbol{H}}(k)\}, \tag{12}$$

где $L < \infty$.

Нетрудно показать, что тогда полученная ковариационная функция

$$\hat{\rho}_{\boldsymbol{H}}(n) = \begin{cases} \rho_{\boldsymbol{H}}(n), & n \le L \\ 0, & n > L \end{cases}$$

В формуле (9) так выберем $\lambda_k, k = 0, \dots, N$, чтобы $\sigma_k^2 = \sigma^2 = 1/N$. Для этого рассмотрим функцию:

$$I(\lambda) = \int_{-\pi}^{\lambda} f_{\boldsymbol{H}}(x)dx.$$

Для каждого $\alpha_k = \frac{k}{N}, k = 1, \dots, N$, находим λ_k: $I(\lambda_k) = \alpha_k$.

Положим величины V_k в формуле (8)

$$V_k = \frac{X_k - iY_k}{2}, \tag{13}$$

где $X_k, Y_k \sim N(0, 2\sigma^2)$ – независимы и одинаково распределены.

При таком представлении независимость, центрированность и гауссовость V_k следуют из аналогичных свойств X_k и Y_k, а дисперсия

$$E(V_k^2) = E|(X_k - iY_k)/2|^2 = E[(X_k^2 + Y_k^2)/4] = (EX_k^2 + EY_k^2)/4 = \sigma^2.$$

С учетом последних преобразований, симметрии и перехода к действительным значениям формула (8) переписывается следующим образом:

$$\hat{\beta}_M(n) = \sum_{k=1}^{N/2}(X_k cos\lambda_k n + Y_k sin\lambda_k n). \tag{14}$$

Таким образом, в работе приведены следующие алгоритмы:

- алгоритм вычисления индекса Херста произвольного временного ряда, способный вычислять значение индекса в «скользящем окне» в режиме реального времени, что для финансовых данных особенно актуально, учитывая специфику трейдерских систем;
- алгоритм моделирования фрактального броуновского движения с данным индексом Херста, с помощью которого можно аппроксимировать другие процессы.

Также рассмотрены условия, необходимые для аппроксимации произвольных (в том числе и финансовых) данных фрактальным броуновским движением. Такая методика применима к достаточно широкому классу финансовых временных рядов (индексов, цен акций) для их локального анализа и, в частности, кратковременного прогноза.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 11-06-00278-а.

Список литературы

1. Ширяев А.Н. Вероятность : в 2 т. - М. : МЦНМО, 2011. – Т. 1. – 552 с.; Т. 2. – 416 с.
2. Ширяев А.Н. Основы стохастической финансовой математики : в 2 т. - М. : Фазис, 1998. – Т. 1. – 512 с.; Т. 2. – 544 с.
3. Dubovikov M.M., Starchenko N.V., Dubovikov M.S. Dimension of the minimal cover and fractal analysis of time series. - 2004. Physica A 339. - p. 591-608.
4. W. Enders Applied Econometric Time Series. – 2-nd ed. - Wiley, 2004. - 460 p.
5. James D. Hamilton Time Series Analysis. - Princeton University Press, 1994. - 820 p.

Рецензенты:

Голубцов Петр Викторович, доктор физико-математических наук, профессор, кафедра математики, физический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова, г. Москва,

Шаповал Александр Борисович, доктор физико-математических наук, профессор, Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации, г. Москва.