

УДК 621.6.04

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СМЕШИВАНИЯ СЫПУЧИХ МАТЕРИАЛОВ В ЛОПАСТНЫХ СМЕСИТЕЛЯХ

Смолин Д.О.¹, Дёмин О.В.¹, Першин В.Ф.¹

¹ФГБОУ ВПО «Тамбовский государственный технический университет», Тамбов, Россия (392000, г. Тамбов, ул. Советская, 106), e-mail: ds_tmb@mail.ru

Основываясь на исследованиях движения сыпучих материалов в аппаратах с лопастными рабочими органами, предложена математическая модель смешивания сыпучих материалов в лопастных смесителях, построенная на основе теории цепей Маркова. В работе движение частиц сыпучего материала рассматривается в трёх направлениях: осевом (между рядами рабочих органов), радиальном (в пределах рядов рабочих органов) и окружном (по замкнутому контуру). Основываясь на схеме перемещения частиц материала, предложена схема разбиения смесительной камеры с условием равенства объёмов ячеек. Показаны в общем виде матрицы переходных вероятностей и описан способ идентификации вероятности перехода частиц ключевого компонента в осевом, радиальном, окружном направлениях, а также представлены особенности состояния системы в случае двухвального лопастного смесителя.

Ключевые слова: смешивание сыпучих материалов, лопастные смесители, цепи Маркова.

MATHEMATICAL MODEL MIXING BULK MATERIALS IN THE PADDLE MIXERS

Smolin D.O.¹, Dyomin O.V.¹, Pershin V.F.¹

¹Tambov State Technical University, Tambov, Russia (392000, Tambov, street Sovetskaya, 106), e-mail: ds_tmb@mail.ru

Based on studies of the movement of bulk materials in devices with paddle working bodies are proposed the mathematical model of mixing bulk materials paddle mixer, based on the theory of Markov chains. In the motion of particles of bulk material is considered in three directions: axial (between rows of workers), radial (within the ranks of the workers bodies) and circles (closed loop). Based on the patterns of movement of the material particles, proposed partitioning the mixing chamber with the condition that the volume of the cells. Shown in the general transition probability matrix and describes a method for the identification of the transition probability of the particles a key component in the axial, radial, circumferential directions, especially the state of the system are presented in the case of a two-shaft paddle mixer.

Key words: mixing of bulk materials, paddle mixers, Markov chains.

Лопастные смесители сыпучих материалов нашли широкое применение в различных отраслях промышленности и сельского хозяйства. Их расчет при проектировании и модернизации существующих конструкций основывается в основном на экспериментальных данных [2; 5]. Целью настоящей работы является построение математической модели смешивания сыпучих материалов на основе теории цепей Маркова [4]. Предыдущие исследования целого ряда авторов [1; 3; 6] показали возможность эффективного использования данного математического аппарата с различным видом цепей (одномерные, двумерные, использующие блочные матрицы и т.д.) для моделирования процесса перемешивания в лопастных смесителях периодического и непрерывного способа действия.

Опираясь на результаты предыдущих исследований, предложена математическая модель, в которой перемещение частиц в процессе смешивания представлено в трёх направлениях:

- 1) осевом (рис. 1а). Представляет собой перемещение частиц материала между рядами рабочих органов вдоль смесительной камеры;
- 2) радиальном (рис. 1б). Частицы материала перемещаются в пределах рядов рабочих органов смесителя;
- 3) окружном (рис. 1в). Перемещение частиц материала происходит по замкнутому циркуляционному контуру.

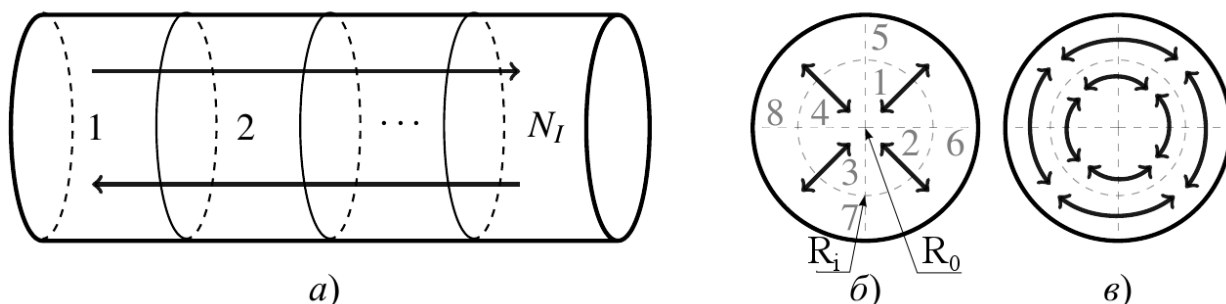


Рисунок 1 – Схема перемещения частиц и деления на ячейки: (а) – осевое, (б) – радиальное, (в) – окружное.

Смесительная камера разделяется на ячейки равного объёма. В осевом направлении на N_I одинаковых частей, равных числу рядов рабочих органов (рис. 1а). Нумерацию частей производим от одного торца камеры до другого.

Каждую часть, полученную при разбиении в осевом направлении, разобьём последовательно в радиальном направлении на N_R колец (рис. 1б) и в окружном направлении на C_R (рис. 1в) секторов:

$$C_R = \frac{360^\circ}{\alpha}, \quad (1)$$

где α - угол сектора.

Количество ячеек в каждой полученной части определяется формулой:

$$N_J = C_R \cdot N_R, \quad (2)$$

Нумеруются ячейки (рис. 1б) с индексом приращения $J_C = (n_R - 1) \cdot C_R$, где $n_R = \overline{1, N_R}$ - номер кольца.

Радиусы колец (рис. 1б), при условии одинакового объёма ячеек, вычисляются по формуле:

$$R_i = \sqrt{R_{i-1}^2 - \frac{R_0^2}{N_R}}, \quad i = \overline{1, N_R - 1}, \quad (3)$$

где R_0 - радиус смесительной камеры.

Состояние системы в момент времени $\tau = k \cdot \Delta T$ (где k - номер перехода, ΔT - длительность перехода), представим в виде вектора-столбца размером $(N_I \times N_J) \times 1$:

$$S^k = [S_1^k \quad S_2^k \quad \dots \quad S_{N_J}^k \quad S_{N_J+1}^k \quad \dots \quad S_{N_J \cdot (N_I-1)}^k \quad S_{N_J \cdot N_I}^k]^T, \quad (4)$$

Следующее состояние системы S^{k+1} зависит от текущего и может быть представлено в следующей матричной форме:

$$S^{k+1} = S^k \cdot P, \quad (5)$$

где P - матрица переходных вероятностей.

Матрица переходных вероятностей с учетом трёх направлений перемещения частиц материала определяется по формуле:

$$P = P_T \cdot P_R \cdot P_A, \quad (6)$$

где P_T - матрица переходных вероятностей при перемещении частиц в окружном направлении; P_R - матрица переходных вероятностей при перемещении частиц в радиальном направлении; P_A - матрица переходных вероятностей при перемещении частиц в осевом направлении.

$$P_T = \begin{pmatrix} P_{T_{1,1}} & O & \dots & O \\ O & P_{T_{2,2}} & \dots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \dots & P_{T_{N_I-N_J}} \end{pmatrix}, \quad (7)$$

где O - нулевая матрица размером $N_I \times N_I$; $P_{T_{i,i}}$ - блочная матрица переходных вероятностей при перемещении частиц в окружном направлении для каждой i -й части смесительной камеры при осевом разбиении размером $N_J \times N_J$, $i = \overline{1, N_J}$.

$$P_{T_{i,i}} = \begin{pmatrix} M_{T_{1,1}} & O & \dots & O \\ O & M_{T_{2,2}} & \dots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \dots & M_{T_{N_J, N_J}} \end{pmatrix}, \quad (8)$$

где O - нулевая матрица размером $N_J \times N_J$; $M_{T_{i,i}}$ - блочная матрица размером $C_R \times C_R$, $i = \overline{1, N_J}$.

$$M_{T_{i,i}} = \begin{pmatrix} P_{1+I, 1+I}^t & P_{1+I, 2+I}^t & 0 & 0 & \dots & 0 & P_{1+I, C_R+I}^t \\ P_{2+I, 1+I}^t & P_{2+I, 2+I}^t & P_{2+I, 3+I}^t & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & P_{3+I, 2+I}^t & P_{3+I, 3+I}^t & P_{3+I, 4+I}^t & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ P_{C_R+I, 1+I}^t & 0 & 0 & 0 & \dots & P_{C_R+I, C_R-1+I}^t & P_{C_R+I, C_R+I}^t \end{pmatrix}, \quad (9)$$

где $p_{l,m}^i$ - вероятность перехода концентрации материала из l -й ячейки в m -ю при окружном смешивании, $l = \overline{1, C_R}$, $m = \overline{1, C_R}$; $I_i = (i-1) \cdot C_R$ - индекс приращения.

Матрица переходных вероятностей при перемещении частиц в радиальном направлении имеет следующий вид:

$$P_R = \begin{pmatrix} P_{R_{1,1}} & O & \dots & O \\ O & P_{R_{2,2}} & \dots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \dots & P_{R_{N_I, N_I}} \end{pmatrix}, \quad (10)$$

где O - нулевая матрица размером $N_I \times N_I$; $P_{R_{i,i}}$ - блочная матрица переходных вероятностей при перемещении частиц в радиальном направлении для каждой i -й части смесительной камеры размером $N_J \times N_J$, $i = \overline{1, N_I}$.

$$P_{R_{i,i}} = \begin{pmatrix} M_{R_{i,1}} & M_{R_{i,2}} & \dots & M_{R_{i, N_J}} \\ M_{R_{i,2}} & M_{R_{i,2}} & \dots & M_{R_{i, N_J}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{R_{i, N_J, 1}} & M_{R_{i, N_J, 2}} & \dots & M_{R_{i, N_J, N_J}} \end{pmatrix}, \quad (11)$$

где $M_{R_{i,j}}$ - блочная матрица размером $C_R \times C_R$, $i = \overline{1, N_I}$, $j = \overline{1, N_J}$:

$$M_{R_{i,j}} = \begin{pmatrix} p_{1+I_r, 1+I_r}^r & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_{2+I_r, 2+I_r}^r & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & p_{C_R+I_r, C_R+I_r}^r \end{pmatrix}, \quad (12)$$

где $p_{l,m}^r$ - вероятность перехода концентрации материала из l -й ячейки в m -ю при перемещении частиц в радиальном направлении, $l = \overline{1, C_R}$, $m = \overline{1, C_R}$; $I_r = (i-1) \cdot C_R$ - индекс приращения.

Матрица переходных вероятностей P_A при перемещении частиц в осевом направлении имеет вид:

$$P_A = \begin{pmatrix} P_{A_{1,1}} & P_{A_{1,2}} & O & O & \dots & O & O & O \\ P_{A_{2,1}} & P_{A_{2,2}} & P_{A_{2,3}} & O & \dots & O & O & O \\ O & P_{A_{3,2}} & P_{A_{3,3}} & P_{A_{3,4}} & \dots & O & O & O \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ O & O & O & O & \dots & P_{A_{N_I-1, N_I-2}} & P_{A_{N_I-1, N_I-1}} & P_{A_{N_I-1, N_I}} \\ O & O & O & O & \dots & O & P_{A_{N_I, N_I-1}} & P_{A_{N_I, N_I}} \end{pmatrix}, \quad (13)$$

где O - нулевая матрица размером $N_J \times N_J$, а $P_{A_{i,j}}$ - блочная матрица, $i = \overline{1, N_I}$, $j = \overline{1, N_I}$.

$$P_{A_i,j} = \begin{pmatrix} P_{1+I_a,1+I_a}^a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & P_{2+I_a,2+I_a}^a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & P_{N_J+I_a,N_J+I_a}^a \end{pmatrix}, \quad (14)$$

где $P_{l,m}^a$ - вероятность перехода концентрации материала из l -й ячейки в m -ю при перемещении частиц в осевом направлении $l = \overline{1, N_I \cdot N_J}$, $m = \overline{1, N_I \cdot N_J}$; $I_a = (i-1) \cdot N_J$ и $J_a = (j-1) \cdot N_J$ - индексы приращения.

Для двухвальных лопастных смесителей состояние системы можно представить в виде вектора-столбца:

$$S_D^k = [S_a^k \quad S_b^k]^T, \quad (15)$$

где S_a^k и S_b^k - состояния системы при вращении I и II-го валов соответственно (рис. 2), определяемые по формуле (4).

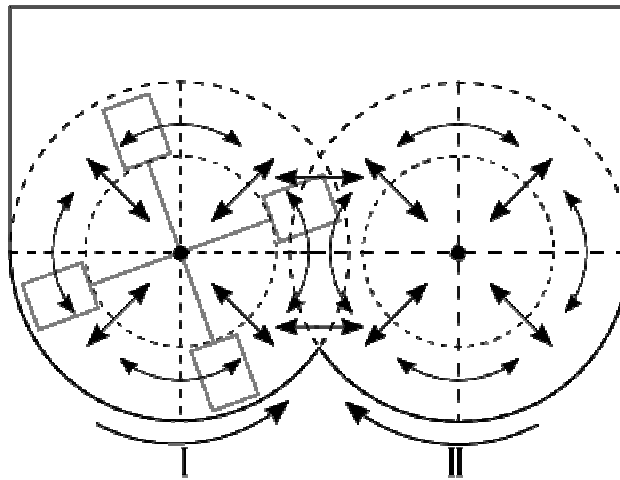


Рисунок 2 – Схема перемещения частиц и разделения на ячейки в двухвальном лопастном смесителе.

Состояние системы S_D^{k+1} можно представить в матричной форме:

$$S_D^{k+1} = S_D^k \cdot P_D \cdot P_U, \quad (16)$$

где P_D - матрица смешивания, имеющая вид:

$$P_D = \begin{pmatrix} P & O \\ O & P \end{pmatrix}, \quad (17)$$

где O - нулевая матрица размером $N_I \times N_J$.

P_U - матрица обмена частиц материала при вращении I и II-го валов. Элементы матрицы, кроме элементов $P_{N_J \cdot i_I - C_R + i, N_J \cdot j_I - C_R + j}^u$, где $i = 1, \frac{C_R}{2}$, $i_I = \overline{1, N_I}$, $j = \frac{C_R}{2} + 1, C_R$, $j_I = \overline{N_I + 1, 2 \cdot N_I}$, равны нулю.

Идентификация параметров математической модели, в частности вероятности перехода частиц ключевого компонента в осевом (p^a), радиальном (p^r), окружном направлениях (p^t) и при обмене частиц при вращении I и II-го вала (p^u), определяли, используя результаты экспериментов на лабораторном лопастном смесителе.

Первоначально загрузку ключевого компонента осуществляли таким образом, чтобы по результатам эксперимента можно было идентифицировать только один параметр. Например, при идентификации вероятности перехода частиц ключевого компонента в осевом направлении загрузку осуществляли в определенный участок по длине смесительной камеры (N_I , рис. 1). При различном времени смешивания определяли концентрации ключевого компонента в каждой ячейке и на основании полученных данных рассчитывали вероятности.

Описанная математическая модель позволяет учитывать характерные особенности лопастных смесителей, обеспечивая возможность эффективной модернизации существующих типов и проектирование новых образцов смесительного оборудования.

Список литературы

1. Баранцева Е.А. Процессы смешивания сыпучих материалов: моделирование, оптимизация, расчет / Е.А. Баранцева, В.Е. Мизонов, Ю.В. Хохлова. — Иваново : ГОУ ВПО «Ивановский государственный энергетический университет им. В.И. Ленина», 2008. — 116 с.
2. Конструирование и расчет машин химических производств : учебник для машиностроительных вузов по специальности «Химическое машиностроение и аппаратостроение» / Ю.И. Гусев, И.Н. Карасев, Э.Э. Кольман-Иванов и др. — М. : Машиностроение, 1985. — 408 с.
3. Дёмин О.В. Совершенствование методов расчёта и конструкций лопастных смесителей : дис. ... канд. техн. наук. — Тамбов, 2003. — 210 с.
4. Марков А.А. Избранные труды. Теория чисел. Теория вероятности. — М. : АН СССР, 1951. — 717 с.
5. Макаров Ю.И. Аппараты для смешивания сыпучих материалов. — М. : Машиностроение, 1973. — 216 с.

6. Berthiaux H. Application of the theory of Markov chains to model different processes in particle technology / H. Berthiaux, V. Mizonov, V. Zhukov // Powder Technology. — 2005. — Vol. 157, № 1–3. — P. 128–137.

Рецензенты:

Мизонов В.Е., д.т.н., профессор, заведующий кафедрой прикладной математики ФГБОУ ВПО «Ивановский государственный энергетический университет им. В.И. Ленина», г. Иваново.

Лабутин А.Н., д.т.н., профессор, заведующий кафедрой технической кибернетики и автоматики, ФГБОУ ВПО «Ивановский государственный химико-технологический университет», г. Иваново.